UITWERKINGEN

1. De punten A, B, C, D in $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven door:

$$A : \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D : \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zij V het vlak door de punten A, B, C.

(a) (1 pt) Bepaal het oppervlak van de driehoek met hoekpunten A, B, C.
Oplossing: De gevraagde oppervlakte is de helft van het oppervlak van de parallellogram opgespannen door bijvoorbeeld $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ en $\mathbf{C} - \mathbf{A}$. En dat is weer de lengte van het uitproduct

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 \\ -2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De lengte van dit uitproduct is $\sqrt{3}$ en oppervlakte driehoek de helft, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(b) (1/2 pt) Bepaal de vergelijking van het vlak V.
Oplossing: De normaal van het gevraagde vlak hebben we net uitgerekend, $(1, 1, -1)^t$. Dus de vergelijking heeft de vorm $x_1 + x_2 - x_3 = c$ voor de één of andere c. Deze kunnen we bepalen door A in te vullen. We vinden $c = 2$ en dus $x_1 + x_2 - x_3 = 2$.

Een tweede manier is om te beginnen met $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ en dan a, b, c, d zó te kiezen dat A, B, C erop liggen. We krijgen dan drie homogene vergelijkingen in de onbekenden a, b, c, d.

NB: Een vergelijking van een oppervlak is wat anders dan een parametervoorstelling. Veel studenten schijnen dit niet te weten.

(c) (1 pt) Bepaal de afstand van D tot het vlak V.
Oplossing: Zij l de lijn door D die loodrecht op V staat, en snij deze met V. De afstand tussen D en dit snijpunt is de gevraagde afstand. Dus

$$l = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + \lambda \\ -1 + \lambda \\ 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Snijden met $x_1 + x_2 - x_3 = 2$ geeft:

$$(-2 + \lambda) + (-1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 2.$$

Uitwerken; $-4 + 3\lambda = 2$ en dus $\lambda = 2$. De verschilvector tussen D en het snijpunt is dus $2(1, 1, -1)^t$. De lengte daarvan is $2\sqrt{3}$.

2. Beschouw de vectorruimte $V = \mathbb{R}^5$ met daarop het standaard inproduct (dot-product). Zij $W \subset V$ de deelruimte gegeven door de vergelijkingen

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad x_2 + x_3 + x_5 = 0.$$

(a) (1/2 pt) Bepaal een basis van W.
Oplossing: De deelruimte W wordt gegeven door twee onafhankelijke vergelijkingen in 5 onbekenden. De dimensie van W wordt dus $5 - 2 = 3$. We kunnen het stelsel vergelijkingen voor W oplossen, maar het is ook voldoende om drie onafhankelijke oplossingen te geven.
Kies $x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1$. Dan volgt $x_2 = -1$ en $x_1 = 1$.
Kies $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$. Dan volgt $x_2 = 0$ en $x - 1 = 0$.
Kies $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$. Dan volgt $x_2 = -1$ en $x_1 = 2$.
Een basis van W wordt dus gegeven door

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0, 1)^t, \quad \mathbf{v}_2(0, 0, 0, 1, 0)^t, \quad \mathbf{v}_3 = (2, -1, 1, 0, 0)^t.$$

(b) (1/2 pt) Bepaal een basis van het orthogonaal complement van W.
Oplossing: Het orthogonaal complement van W heeft dimensie $5 - \dim(W) = 2$. Twee vectoren die loodrecht staan op alle vectoren uit W zijn de twee coefficientenvectoren van de vergelijkingen: $(1, 1, -1, 0, 0)^t$ en $(0, 1, 1, 0, 1)^t$. Ze zijn onafhankelijk en vormen dus een basis van het complement.

(c) (1/2 pt) Bepaal een orthonormale basis van W.
Oplossing: We passen Gram-Schmidt toe op $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Bepaal de Gram-matrix van deze vectoren en schrijf schematisch

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Trek eerste rij van derde af:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Rechts staat een orthogonale basis van W. Een orthonormale basis wordt gegeven door

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0, 0, 1)^t, \quad \mathbf{f}_2 = (0, 0, 0, 1, 0)^t, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, -1)^t.$$

(d) (1 pt) Bepaal de loodrechte projectie van $(2, 0, 0, 1, 1)$ op W.
Oplossing: Voor een willekeurige vector $\mathbf{v}$ geldt dat de projectie op W gegeven wordt door

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_3)\mathbf{f}_3.$$

Berekening leert dat voor $\mathbf{v} = (2,0,0,1,1)^t$ geldt

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 &= \frac{3}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,0,1)^t \\
(\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 &= 1\cdot(0,0,0,1,0)^t \\
(\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_3)\mathbf{f}_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,0,-1)^t
\end{aligned}$$

De som van deze vectoren is de gevraagde projectie

$$(4/3,-1,1/3,1,2/3)^t.$$

3. Met $\mathbb{R}[x]$ geven we de vectorruimte van alle polynomen met reële coëfficienten aan, en met $\mathbb{R}[x]_n$ de deelruimte van alle polynomen met graad $\leq n$.

   (a) (1/2 pt) Geef van de volgende twee deelverzamelingen aan of ze lineaire deelruimte van $\mathbb{R}[x]$ zijn of niet, en leg uit waarom.

   $$\{p(x)\in\mathbb{R}[x]\mid p(-1)=1\}$$
   $$\{p(x)\in\mathbb{R}[x]\mid p(-1)=0\}$$

   Oplossing: Noem de eerste verzameling A en de tweede B. De nulvector (is polynoom dat overal waarde nul heeft) komt niet in A voor, dus is A geen deelruimte. Voor B geldt dat als $p(x), q(x)\in B$ en $\lambda\in\mathbb{R}$ dan geldt: $(p+q)(-1)=p(-1)+q(-1)=0+0=0$. Dus $p+q\in B$. Verder, $\lambda p(-1)=\lambda\cdot 0=0$. Dus ook $\lambda p\in B$. Tenslotte bevat B ook de nulvector. Hiermee is aan de voorwaarden voor een deelruimte voldaan.

   (b) (1/2 pt) Bepaal de rang en een basis van het opspansel van de vectoren

   $$1+2x-x^2, 2-x+x^2+x^3, x^2+x^3, -2-x^3\in\mathbb{R}[x]$$

   Oplossing: Schrijf de polynomen uit ten opzichte van de standaard basis $1,x,x^2,x^3$. We krijgen vier kolomvectoren in $\mathbb{R}^4$. Een veegoperatie leert dat deze kolommen onafhaneklijk zijn. Daarmee zijn de oorspronkelijke polynomen ook onafhankelijk en vormen dus een basis voor hun opspansel.

   De lineaire afbeelding $D:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$ wordt gegeven door $D: p(x)\mapsto x^2p''(x)+p'(x)$, waarin het accent differentiatie naar x betekent.

   (c) (1/2 pt) Geef de matrix van D ten opzichte van de geordende standaardbasis $1,x,x^2$ van $\mathbb{R}[x]_2$.
   Oplossing: Er geldt

   $$\begin{aligned}
   D(1) &= 0 \\
   D(x) &= 1 \\
   D(x^2) &= 2x^2+2x
   \end{aligned}$$

De gevraagde matrix wordt dus

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) (1 pt) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van D. Schrijf de eigenvectoren als elementen van $\mathbb{R}[x]$ op.
Oplossing: We bepalen eigenwaarden en -vectoren van de matrix van D. Omdat dit een bovendriehoeksmatrix is, lezen we de eigenwaarden zo af: $0, 0, 2$. Eigenvectoren bij $\lambda = 0$, los op:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

We zien, $x_2 = x_3 = 0$ en $x_1 = t$ kan willekeurig gekozen worden. Dus eigenvectoren zijn $(1, 0, 0)$ en veelvouden daarvan. Dit komt overeen met de constante polynomen. Eigenvectoren bij $\lambda = 2$, los op:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

We zien, $x_2 = x_3$ en $x_1 = x_2/2$. Dus eigenvectoren zijn $(1, 2, 2)$ en veelvouden daarvan. Dit komt overeen met $1 + 2x + 2x^2$ en zijn veelvouden.

4. Laat $V = \mathbb{R}^3$ met daarop het standaard inproduct (dot-product). Laat $\mathbf{a} \in V$ een vector $\neq \mathbf{0}$ zijn en definieer $T : V \to V$ door

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\,\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a}.$$

(a) (1/2 pt) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.
Oplossing: Er geldt

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathbf{x}+\mathbf{y} - 2\frac{(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} + \mathbf{y} - 2\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} \\ &= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} T(\lambda\mathbf{x}) &= \lambda\mathbf{x} - 2\frac{(\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} \\ &= \lambda\mathbf{x} - 2\lambda\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} \\ &= \lambda T(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Dus T is een lineaire afbeelding.

(b) (1/2 pt) Laat zien dat T orthogonaal is.
Oplossing: We moeten laten zien dat $|T(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}|$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ of, equivalent daarmee, $|T(\mathbf{x})|^2 = |\mathbf{x}|^2$. Er geldt:

$$\begin{aligned}
|T(\mathbf{x})|^2 &= \left(\mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\right) \cdot \left(\mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\right) \\
&= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - 4\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}) + 4\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\right)^2 (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) \\
&= |\mathbf{x}|^2 - 4\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})^2}{|\mathbf{a}|^2} + 4\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})^2}{|\mathbf{a}|^2} \\
&= |\mathbf{x}|^2
\end{aligned}$$

(c) (1/2 pt) Laat zien dat T symmetrisch is.
Oplossing: Voor elk tweetal $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ moet gelden dat $T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot T(\mathbf{y})$. Er geldt:

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} - 2\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{y}) \\
&= \mathbf{x} - 2\frac{1}{|\mathbf{a}|^2}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{a})
\end{aligned}$$

Deze laatste uitdrukking is symmetrisch in $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$. Dus $T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = T(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{x}$. Deze laatste is weer gelijk aan $\mathbf{x} \cdot T(\mathbf{y})$ vanwege symmetrie van het inproduct.

(d) (1 pt) Bepaal de eigenwaarden van T en de dimensies van de bijbehorende eigenruimten.
Oplossing: Omdat T symmetrisch is, is er een orthonormale basis van eigenvectoren. Omdat T orthogonaal is kunnen die eigenvectoren alleen maar ± 1 zijn. Maar ook zonder deze voorkennis kunnen we als volgt te werk gaan. Stel $\mathbf{v}$ is eigenvector met eigenwaarde λ. Dat wil zeggen,

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{v}.$$

Vermenigvuldiging met $|\mathbf{a}|^2$ geeft $(1-\lambda)|\mathbf{a}|^2\mathbf{v} = 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}$. Als $\mathbf{v}$ en $\mathbf{a}$ onafhankelijk zijn dan impliceert dit dat $(1-\lambda)|\mathbf{a}|^2 = 0$ en $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 0$. Met andere woorden, $\mathbf{v}$ staat loodrecht op $\mathbf{a}$ en $\lambda = 1$. Merk op dat voor elke vector $\mathbf{v}$ loodrecht op $\mathbf{a}$ geldt: $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, dus eigenvector met eigenwaarde 1. De eigenruimte bij $\lambda = 1$ heeft dus dimenensie 2. Als $\mathbf{v}$ en $\mathbf{a}$ afhankelijk zijn dan betekent dit dat $\mathbf{v}$ een scalair veelvoud is van $\mathbf{a}$. Merk op dat $T(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}$, dus eigenvector met eigenwaarde -1. De bijbehorende eigenruimte is 1-dimensionaal.
Een heel korte manier om onderdelen b)c)d) in één keer op te lossen (hoewel ik niet verwacht dat studenten daar op komen): Stel $\mathbf{a}' = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ en breidt dit uit tot een orthormale basis $\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}$ van $\mathbb{R}^3$. We bepalen de matrix van T ten opzichte van deze basis:

$$T(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - 2\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = \mathbf{a} - 2\mathbf{a} = -\mathbf{a}.$$

Vanwege lineairiteit van T geldt dus ook $T(\mathbf{a}') = \mathbf{a}'$.
Omdat $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ loodrecht op $\mathbf{a}$ staan zien we snel $T(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ en $T(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$. De matrix van T ten opzichte van deze basis wordt dus

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix is symmetrisch, dus T is symmetrische afbeelding. De matrix is orthogonaal, dus T is orthogonale afbeelding. De eigenwaarden zijn $-1, 1, 1$ en de eigenruimten zij span($\mathbf{a}$) en span($\mathbf{b}, \mathbf{c}$).
Meetkundig is T een loodrechte spiegeling in het vlak gegeven door $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0$.