Tentamen Lineaire Algebra

30 januari 2014, 8:30-11:30 uur

- Bij dit tentamen mogen dictaten en boeken niet gebruikt worden.
- Een eenvoudige rekenmachine, hoewel niet nodig, is toegestaan, maar geen grafische rekenmachine of smartphone.
- Schrijf op elk vel je naam, studnr en naam practicumleider (Jan van Zweeden, Henk Hietbrink, Shan Shah, Boris Osorno Torres).
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
- Veel succes!

OPGAVEN

Uitwerkingen volgen na de opgaven

1. In $\mathbb{R}^3$ is het gegeven het tweetal vlakken V, W met vergelijkingen

$$V:\ x+2y-2z=2, \quad W:\ x+y=-1$$

en de punten $P=(2,0,0)^t$ en $Q=(0,0,2)^t$.

   (a) (1/2 pt) Bepaal de hoek tussen de normaalvectoren van V en W.

   (b) (1/2 pt) Bepaal een parametervoorstelling van de lijn l door P en Q.

   (c) (1/2 pt) Bepaal een parametervoorstelling van de snijlijn m van V en W.

   (d) (1 pt) Bepaal de afstand tussen l en m.

2. Gegeven is de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) (1 pt) Bepaal de eigenwaarden van M (hint: gebruik dat de som van de kolommen van M gelijk is aan de nulkolom).

   (b) (1 pt) Bepaal alle eigenvectoren van M.

   (c) (1/2 pt) Is er een orthonormale basis van $\mathbb{R}^4$ (tav standaard inproduct) bestaande uit eigenvectoren van M? Zo ja, bepaal deze.

3. Zij $V = \mathbb{R}[x]$ de vectorruimte van polynomen in x met gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. Definieer daarop het inproduct

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

   (a) (1/2 pt) Bepaal een basis van de deelruimte

$$\mathrm{Span}(x^3 - 2x, x + 1, x^2 - 2, x^2 + 2x, x^3 + x^2).$$

   (b) (1 pt) Bepaal een *orthogonale basis* van de deelruimte $W = \mathrm{Span}(x, x^2, x^3)$.(NB, je hoeft in dit onderdeel de vectoren dus niet op lengte te normaliseren)

   (c) (1/2 pt) Bepaal de loodrechte projectie van 1 op $\mathrm{Span}(x, x^2)$.

   (d) (1/2 pt) Beschouw de deelruimte van V opgespannen door $(x - 1/2)^{2n}$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$. Geef een niet-triviaal polynoom aan dat loodrecht staat op alle vectoren uit deze ruimte.

4. Zij $M_{2,2}$ de vectorruimte van 2×2-matrices. Verder is de basis

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

van $M_{2,2}$ gegeven.

Kies $A \in M_{2,2}$ en beschouw de afbeelding $T_A : M_{2,2} \to M_{2,2}$ gegeven door $T_A : X \mapsto AX + XA^t$, waarin A^t de getransponeerde van A is.

   (a) (1/2 pt) Bewijs dat T_A een lineaire afbeelding is.

   (b) (1/2 pt) Een 2×2-matrix M heet antisymmetrisch als $M^t = -M$. Bewijs dat het beeld van een antisysmmetrische matrix onder T_A weer anti-symmetrisch is.

   (c) (1/2 pt) Stel dat λ en μ eigenwaarden van A zijn. Bewijs dat $\lambda + \mu$ een eigenwaarde van T_A is (hint: maak met de eigenvectoren van A een geschikte eigenmatrix X).

We kiezen nu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (d) (1/2 pt) Bepaal de matrix van T_A en opzichte van $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$.

   (e) (1/2 pt) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T_A, uitgeschreven als elementen van $M_{2,2}$.