Tentamen Lineaire Algebra

30 januari 2014, 8:30-11:30 uur

OPGAVEN MET UITWERKINGEN

1. In $\mathbb{R}^3$ is het gegeven het tweetal vlakken V, W met vergelijkingen

$$V: \; x + 2y - 2z = 2, \quad W: \; x + y = -1$$

en de punten $P = (2,0,0)^t$ en $Q = (0,0,2)^t$.

   (a) (1/2 pt) Bepaal de hoek tussen de normaalvectoren van V en W.
   Oplossing: De normaalvector van V is $(1, 2-2)^t$ en die van W : $(1,1,0)^t$. Hun lengten zijn 3 en $\sqrt{2}$ en hun inproduct 3. Dus $\cos\phi = 3/(3 \cdot \sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$. Hieruit volgt dat $\phi = \pi/4$ radialen of 45 graden.

   (b) (1/2 pt) Bepaal een parametervoorstelling van de lijn l door P en Q.
   Oplossing: Steunvector: $P = (2,0,0)^t$ en richting $(0,0,2)^t - (2,0,0)^t = (-2,0,2)^t$. Dus parametervoorstelling: $(2,0,0)^t + \lambda(-2,0,2)^t$.

   (c) (1/2 pt) Bepaal een parametervoorstelling van de snijlijn m van V en W.
   Kies bijv $z = \mu$ willekeurig. Dan worden x, y vastgelegd door de vergelijkingen $x + 2y - 2\mu = 2$ en $x + y = -1$. Hieruit volgt dat $x = -2\mu - 4$ en $y = 2\mu + 3$. Dus parametervoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu - 4 \\ 2\mu + 3 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (d) (1 pt) Bepaal de afstand tussen l en m.
   Oplossing: Kies λ, μ zodanig dat de verbindingsvector

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   tussen l en m loodrecht staat op de richtingvectoren $(-2,0,2)^t$ en $(-1,1,1)^t$. Inproducten moeten dus nul zijn. Inproduct van $\mathbf{v}$ met $(-2,0,2)^t$:

$$-4 + 8\lambda - 8 - 6\mu = 0.$$

   Inproduct van $\mathbf{v}$ met $(-2,2,1)^t$:

$$-4 + 6\lambda - 14 - 9\mu = 0.$$

   Oplossing geeft $\lambda = 0, \mu = -2$. De loodrechte verbindingsvector tussen l en m wordt daarmee $(2,1,2)^t$. De gevraagde afstand is $|\mathbf{v}| = 3$.

2. Gegeven is de matrix
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) (1 pt) Bepaal de eigenwaarden van M (hint: gebruik dat de som van de kolommen van M gelijk is aan de nulkolom).

Oplossing:Eigenwaarde vergelijking luidt
$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$
Volg de hint en tel de 2e,3e en 4e kolom op bij de eerste,
$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 & 1 \\ -\lambda & -\lambda & 1 & -2 \\ -\lambda & 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
Haal de factor λ uit de determinant en veeg in eerste kolom,
$$0 = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -\lambda+2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -\lambda-1 \end{vmatrix}$$
Ontwikkel naar eerste kolom en daarna naar derde rij,
$$0 = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 3 & -3 \\ 0 & -\lambda+2 & 0 \\ -3 & 3 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2) \begin{vmatrix} -\lambda-1 & -3 \\ -3 & -\lambda-1 \end{vmatrix}$$
Twee bij twee determinant uitwerken:
$$0 = \lambda(\lambda-2)((-\lambda-1)^2-9) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda+4).$$
De eigenwaarden zijn: $0, 2, 2, -4$.

(b) (1 pt) Bepaal alle eigenvectoren van M.

Oplossing: De bijbehorende eigenvectoren krijgen we door oplossing van lineaire vergelijkingen. Eigenvectoren bij $\lambda = 0$: $(1,1,1,1)^t$ en zijn veelvouden, bij $\lambda = -4$: $(1,-1,1,-1)^t$ en zijn veelvouden. Bij $\lambda = 2$ voeren we de berekening uit:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

De laatste twee rijen zijn hetzelfde als de eerste twee. We kunnen de laatste dus weghalen en vegen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & -3/2 & 0 \end{array}\right).$$

Kies $x_3 = s, x_4 = t$ willekeurig, dan volgt uit de vergelijkingen $x_1 = -s, x_2 = -t$. De eigenvectoren zijn dus $t(0, -1, 0, 1)^t + s(-1, 0, 1, 0)^t$. De eigenruimte bij $\lambda = 2$ wordt dus opgespannen door $(0, -1, 0, 1)^t$ en $(-1, 0, 1, 0)^t$.

(c) (1/2 pt) Is er een orthonormale basis van $\mathbb{R}^4$ (tav standaard inproduct) bestaande uit eigenvectoren van M? Zo ja, bepaal deze.
Oplossing: Ja, zo'n basis bestaat omdat A een symmetrische matrix is. Uit de berekening van vorige opgave volgt al een orthonormale basis (na normalisatie). Anders moeten we een Gram-Schmidt procedure op de eigenruimte bij $\lambda = 2$ uitvoeren.

3. Zij $V = \mathbb{R}[x]$ de vectorruimte van polynomen in x met gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. Definieer daarop het inproduct

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

(a) (1/2 pt) Bepaal een basis van de deelruimte

$$\text{Span}(x^3 - 2x, x + 1, x^2 - 2, x^2 + 2x, x^3 + x^2).$$

Oplossing: Schrijf de vectoren ten opzichte van de standaard basis $1, x, x^2, x^3$ en in kolomvorm naast elkaar:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

We gaan een rijreductie uitvoeren. Zet de laatste vector bovenaan en veeg de eerste kolom:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veeg nu tweede kolom en daarna derde kolom:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De pivotplaatsen zijn 1,2,3. Dus de eerste drie vectoren, dat wil zeggen $x^3 - 2x, x + 1, x^2 - 2$ vormen een basis en de rang is 3.

(b) (1 pt) Bepaal een *orthogonale basis* van de deelruimte $W = \text{Span}(x, x^2, x^3)$.(NB, je hoeft in dit onderdeel de vectoren dus niet op lengte te normaliseren).

Oplossing: We gaan Gram-Schmidt gebruiken. Het inproduct $\langle x^m, x^n \rangle = \int_0^1 x^{m+n} dx = 1/(m+n+1)$. De Gram-matrix, uitebreid met de bijbehorende vectoren, wordt dus

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1/4 & 1/5 & x \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & x^2 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & x^3 \end{array}\right).$$

Vegen in eerste kolom, en daarna tweede kolom:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1/4 & 1/5 & x \\ 0 & 1/80 & 1/60 & x^2 - \frac{3}{4}x \\ 0 & 1/60 & * & x^3 - \frac{3}{5}x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1/4 & 1/5 & x \\ 0 & 1/80 & 1/60 & x^2 - \frac{3}{4}x \\ 0 & 0 & * & x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{5}x \end{array}\right)$$

Merk op dat we de term op plaats 3,3 niet nodig hebben. Een orthogonale basis wordt gegeven door $x, x^2 - \frac{3}{4}x, x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{5}x$.

(c) (1/2 pt) Bepaal de loodrechte projectie van 1 op $\text{Span}(x, x^2)$.

Oplossing: Uit voorgaande opgave volgt dat een orthogonale basis van $\text{Span}(x, x^2)$ gegeven wordt door, $x, x^2 - \frac{3}{4}x$ en een orthonormale basis door

$$\mathbf{f}_1 = \sqrt{2}x, \quad \mathbf{f}_2 = \sqrt{80}(x^2 - \frac{3}{4}x).$$

De projectie van 1 wordt gegeven door

$$\langle 1, \mathbf{f}_1 \rangle \mathbf{f}_1 + \langle 1, \mathbf{f}_2 \rangle \mathbf{f}_2.$$

De inproducten: $\langle 1, \mathbf{f}_1 \rangle = \sqrt{2} \int_0^1 x dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en

$$\langle 1, \mathbf{f}_2 \rangle = \sqrt{80} \int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{4}x \right) dx = \sqrt{80}(\frac{1}{3} - \frac{3}{8} = -\frac{\sqrt{80}}{24}.$$

De projectie wordt

$$\frac{1}{2}\mathbf{f}_1 - \frac{\sqrt{80}}{24}\mathbf{f}_2 = x - \frac{80}{24}(x^2 - \frac{3}{4}x) = -\frac{10}{3}x^2 + 4x.$$

Je kunt het ook anders aanpakken. Stel dat de projectie gelijk is aan $ax^2 + bx$ dan moet het verschil met 1, dus $ax^2 + bx - 1$ loodrecht staan op zowel x als x^2. Dat wil zeggen:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle ax^2 + bx - 1, x \rangle = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 - x) dx = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{2} \\ 0 &= \langle ax^2 + bx - 1, x^2 \rangle = \int_0^1 (ax^4 + bx^3 - x^2) dx = \frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Oplossing van dit stelsel vergelijkingen in a, b levert $a = -\frac{10}{3}$ en $b = 4$.

(d) (1/2 pt) Beschouw de deelruimte van V opgespannen door $(x-1/2)^{2n}$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$. Geef een niet-triviaal polynoom aan dat loodrecht staat op alle vectoren uit deze ruimte.
Oplossing: Merk op dat de polynomen $(x-1/2)^{2n}$ hetzelfde zijn als we x door $1-x$ vervangen. De functie is dus even op het interval $[0,1]$. Als we in $x-1/2$ de x door $1-x$ vervangen dan krijgen we $1/2-x = -(x-1/2)$. Deze is dus oneven op $[0,1]$. Merk op dat

$$\langle x-1/2, (x-1/12)^{2n}\rangle = \int_0^1 (x-1/2)^{2n+1}dx = 0$$

omdat $(x-1/2)^{2n+1}$ oneven is op $[0,1]$. Dus $x-1/2$ is gevraagde polynoom.

4. Zij $M_{2,2}$ de vectorruimte van 2×2-matrices. Verder is de basis

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

van $M_{2,2}$ gegeven.

Kies $A \in M_{2,2}$ en beschouw de afbeelding $T_A : M_{2,2} \to M_{2,2}$ gegeven door $T_A : X \mapsto AX + XA^t$, waarin A^t de getransponeerde van A is.

(a) (1/2 pt) Bewijs dat T_A een lineaire afbeelding is.
Oplossing: Merk op dat voor elk tweetal $X, Y \in M_{2,2}$ geldt:

$$T_A(X+Y) = A(X+Y)+(X+Y)A^t = AX+XA^t+AY+YA^t = T_A(X)+T_A(Y).$$

Verder geldt voor elke $X \in M_{2,2}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ dat

$$T_A(\lambda X) = A(\lambda X) + \lambda XA^t = \lambda(AX + XA^t) = \lambda T_A(X).$$

Hieruit volgt dat T_A een lineaire afbeelding is.

(b) (1/2 pt) Een 2×2-matrix M heet antisymmetrisch als $M^t = -M$. Bewijs dat het beeld van een antisysmmetrische matrix onder T_A weer anti-symmetrisch is.
Oplossing: Stel X antisymmetrisch is. We moeten laten zien dat $T_A(X)$ ook antisymmetrisch is.

$$T_A(X)^t = (AX + XA^t)^t = X^tA^t + AX^t = -XA^t - AX = -T_A(X).$$

In de derde stap hebben we $X^t = -X$ gebruikt.

(c) (1/2 pt) Stel dat λ en μ eigenwaarden van A zijn. Bewijs dat $\lambda+\mu$ een eigenwaarde van T_A is (hint: maak met de eigenvectoren van A een geschikte eigenmatrix X).
Oplossing: Stel dat $\mathbf{u}$ een eigenvector bij λ is en $\mathbf{v}$ een eigenvector bij μ. Kies nu $X = \mathbf{u}\mathbf{v}^t$, dit is een 2×2-matrix. Dan geldt

$$\begin{aligned} T_A(\mathbf{u}\mathbf{v}^t) &= A\mathbf{u}\mathbf{v}^t + \mathbf{u}\mathbf{v}^tA^t \\ &= \lambda\mathbf{u}\mathbf{v}^t + \mathbf{u}(A\mathbf{v})^t \\ &= \lambda\mathbf{u}\mathbf{v}^t + \mu\mathbf{u}\mathbf{v}^t = (\lambda+\mu)\mathbf{u}\mathbf{v}^t. \end{aligned}$$

We kiezen nu
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) (1/2 pt) Bepaal de matrix van T_A en opzichte van $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$.
Oplossing: Een berekening leert
$$T_A\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$T_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
De gevraagde matrix wordt nu,
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(e) (1/2 pt) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T_A, uitgeschreven als elementen van $M_{2,2}$.
Oplossing: De eigenwaarden volgen meteen uit het feit dat de matrix van T_A een bovendiagonaal matrix is. De eigenwaarden staan op de diagonaal: $0, 1, 1, 2$. Bovendoen volgt uit onderdeel (c) dat de eigenwaarden de sommen van de eigenwaarden van M zijn. In ons geval heeft M de eigenwaarden $0, 1$. Dat levert voor T_A de eigenwaarden $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2$. Oplossingen van de vergelijkingen geeft de volgende eigenruimten. Bij $\lambda = 0$ vinden we de veelvouden van $\mathbf{f}_1$, bij $\lambda = 1$ de ruimte opgespannen door $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ en bij $\lambda = 2$ de veelvouden van $\mathbf{f}_4$. In matrices:
$$\lambda = 0: \; t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2: \; t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$
$$\lambda = 1: \; \begin{pmatrix} 0 & t \\ s & 0 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$