Herkansing Lineaire Algebra

14 maart 2013, 9:00-12:00 uur

- Bij dit tentamen mag het dictaat of aantekeningen niet gebruikt worden. Een eenvoudige calculator is toegestaan, een Grafische Rekenmachine niet.
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
- Veel succes!

1. (1 pt) Beschouw in $\mathbb{R}^3$ de rechte lijn l met parametervoorstelling
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
en het punt P met coördinaten $(1,3,1)^t$. Bepaal de afstand van P tot l.

2. (1 pt) Gegeven is het drietal punten $A = (-2,1,-2)^t, B = (2,-1,1)^t, C = (1,1,1)^t$. Bepaal het oppervlak van de driehoek ABC.

3. Bepaal een basis van de vectorruimten opgespannen door de volgende stelsels vectoren,
   (a) (1 pt) $\{(3,-1,7,2),\ (2,6,3,-2),\ (1,1,2,0)\}$ in $\mathbb{R}^4$.
   (b) (1 pt) $\{1+2x-x^2,\ -2-3x+3x^3,\ 1+4x+x^3,\ x+x^2\}$ in $\mathbb{R}[x]$.

4. In $\mathbb{R}^4$ met standaard inproduct is de deelruimte V gegeven door de vergelijkingen $x_1 + x_3 = 0,\ x_1 - x_2 + x_4 = 0$, waarin x_1, x_2, x_3, x_4 de standaardcoördinaten in $\mathbb{R}^4$ zijn.
   (a) (1/2 pt) Bepaal een basis van V.
   (b) (1 pt) Bepaal een orthonormale basis van V.
   (c) (1/2 pt) Bepaal de loodrechte projectie van $(1,1,1,1)^t$ op V.

5. Beschouw $\mathbb{R}^3$ met standaard inprodukt en de lineaire afbeelding gegeven door de matrixvermenigvuldiging $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ waarin
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
   (a) (1 pt) Bepaal de eigenwaarden van A en een basis van hun bijbehorende eigenruimten.
   (b) (1 pt) Leg uit waarom er een orthonormale basis van eigenvectoren bestaat. Bepaal zo'n orthonormale basis.

Z.O.Z

6. Zij $A \in M_{2\times 2}$ waarin $M_{2\times 2}$ de vectorruimte van 2×2-matrices met reële elementen is. Beschouw de afbeelding $T_A : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ gegeven door

$$T_A : M \mapsto AM.$$

   (a) (1/2 pt) Laat zien dat T_A een lineaire afbeelding is.

   (b) (1/2 pt) Stel $\lambda \in \mathbb{R}$. Bewijs: λ is eigenwaarde van A precies dan als λ eigenwaarde van T_A is.

   (c) (1/2 pt) Zij λ een eigenwaarde van A. Bewijs dat de meetkundige multipliciteit van λ bij T_A twee maal zo groot is als die bij A.

   (d) (1/2 pt) Bewijs dat het beeld van T_A even-dimensionaal is.