Tentamen Lineaire Algebra

31 januari 2013, 8:30-11:30 uur

OPGAVEN

1. In $\mathbb{R}^3$ zijn de rechte lijnen l, m gegeven met parametervoorstellingen

$$l : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad m : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (1/2 pt) Bewijs dat l en m elkaar niet snijden.

   (b) (1 pt) Bepaal de afstand tussen l en m.

   (c) (1 pt) Gegeven is het vlak V met vergelijking $x_1 - x_2 - x_3 = 2$. Bepaal een parametervoorstelling van de lijn die loodrecht op V staat en zowel l als m snijdt.

2. In $\mathbb{R}^4$ nemen we het standaard inproduct (dot product). Zij W de deelruimte gegeven door $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$ (hierin zijn x_1, x_2, x_3, x_4 de coördinaten ten opzichte van de standaardbasis).

   (a) (1/2 pt) Bepaal een basis van W.

   (b) (1 pt) Bepaal een orthonormale basis van W.

   (c) (1/2 pt) Bepaal een orthonormale basis van het orthogonaal complement van W.

   (d) (1/2 pt) Bepaal de orthogonale projectie van de vector $(1, 1, 0, 0)^t$ op W.

Z.O.Z.

3. Zij V de vectorruimte over $\mathbb{R}$ bestaande uit de polynomen van graad ≤ 3 met coëfficienten in $\mathbb{R}$.

   (a) Geef van de volgende deelverzamelingen van V aan of ze een lineaire deelruimte van V vormen of niet, en onderbouw je bewering.

      i. (1/2 pt) $W = \{p(x) \in V \mid p(1) = 1\}$.

      ii. (1/2 pt) $W = \{p(x) \in V \mid p(1) = 0\}$.

   Beschouw de lineaire afbeelding $T : V \to V$ gegeven door $T : p(x) \mapsto -p(x) + (x+1)\frac{dp(x)}{dx}$.

   (b) (1/2 pt) Bepaal de matrix van T ten opzichte van de geordende basis $\{1, x, x^2, x^3\}$.

   (c) (1 pt) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T (schrijf de eigenvectoren als polynomen op).

4. In een vectorruimte V met inproduct $\langle\ ,\ \rangle$ is het tweetal vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, beiden $\neq \mathbf{0}$, gegeven. Zij W het opspansel van $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ en stel dat $W \neq V$. Beschouw de afbeelding $A : V \to V$ gegeven door

$$A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}.$$

   (a) (1/2 pt) Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

   (b) (1/2 pt) Bewijs dat A een symmetrische afbeelding is.

   (c) (1 pt) Bepaal de eigenruimte bij eigenwaarde 1 (hint: onderscheid de gevallen dat **a** en **b** onafhankelijk respectievelijk afhankelijk zijn).

   (d) (1/2 pt) Neem nu aan dat $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ een orthonormaal stelsel vormt. Bepaal de eigenwaarden met bijbehorende eigenruimten van A.