Herkansing Lineaire Algebra, 13 maart 2012

- Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
- Veel succes!

1. Beschouw in $\mathbb{R}^3$ de rechte lijnen l en m met parametervoorstellingen

$$l: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

en het punten $A = (1, 1, -1)^t$.

(a) (1 punt) Bepaal de afstand tussen de lijnen l en m.

(b) (1/2 punt) Bepaal een vergelijking van het vlak V dat zowel A als l bevat.

(c) (1/2 punt) Bepaal een parametervoorstelling van de lijn door A die zowel l als m snijdt.

2. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \lambda \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) (1 punt) Bereken de determinant van A voor elke λ.

(b) (1 punt) Bereken de inverse van A voor iedere λ waarvoor de inverse bestaat.

Z.O.Z.

3. Zij de $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de lineaire afbeelding die elke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ afbeeldt naar zijn loodrechte projektie op het hypervlak V gegeven door $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$.

   (a) (1 punt) Bepaal het beeld van $(1, 2, 2, 1)^t$ onder P.

   (b) (1/2 punt) Geef een basis van V.

   (c) (1/2 punt) Zonder te rekenen: wat zijn eigenwaarden en eigenvectoren van P?

   (d) (1 punt) Bepaal de matrix van P.

4. (a) (1/2 punt) Bewijs, dat als λ eigenwaarde is van een orthogonale matrix U, dan $\lambda = \pm 1$.

   Gegeven is de 3×3-matrix

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (b) (1/2 punt) Toon aan dat A zowel een orthogonale als een symmetrische matrix is.

   (c) (1/2 punt) Bewijs, zonder berekening van de eigenwaardevergelijking, dat de eigenwaarden $1, -1, -1$ zijn.

   (d) (1 punt) Bepaal de eigenvectoren van A.

   (e) (1/2 punt) Bepaal een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvectoren