Lineaire Algebra A, 2e deel, 17 januari 2012

- Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
- Schrijf op elk vel je naam, studnr en naam practicumleider.
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
- Veel succes!

OPGAVEN

1. (a) (1/2 pt) Bepaal het oppervlak van de driehoek in $\mathbb{R}^3$ met hoekpunten $(2,1,0)^t, (-1,0,2)^t, (0,2,3)^t$.

   (b) (1 pt) Voor elke $a \in \mathbb{R}$ definieren we de matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Bepaal de determinant van M_a voor elke $a \in \mathbb{R}$.

2. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (3/2 pt) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A

   (b) (1/2 pt) Bepaal een orthogonale, inverteerbare matrix S zó dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is.

   (c) (1/2 pt) Is S uit de voorgaande opgave uniek bepaald? Zo nee, hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er voor S? (NB: Dit onderdeel kan ook gedaan worden als je het voorgaande onderdeel niet (correct) hebt).

3. Zij $V \subset \mathbb{R}^5$ de deelruimte gegeven door de vergelijkingen

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \text{ en } x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0.$$

   Het orthogonaal complement van V geven we aan met $V^\perp$ (ter herinnering: orthogonaal complement van V is de verzameling vectoren die loodrecht op alle vectoren uit V staan).

   (a) (1/2 pt) Bepaal een basis van V.

Z.O.Z.

(b) (1/2 pt) Bepaal een orthonormale basis van V.

(c) (1/2 pt) Bepaal de orthogonale projectie van $(1, 1, 1, 1, 1)^t$ op V.

(d) (1/2 pt) Bepaal de orthogonale projectie van $(1, 1, 1, 1, 1)^t$ op $V^\perp$.

4. Zij $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ een orthogonale afbeelding waarvan gegeven is dat $A : (1, 1, 0)^t \mapsto (1, 0, -1)^t$ en $A : (1, -1, 1)^t \mapsto (1, 1, 1)^t$. Verder is gegeven dat de determinant van de matrix van A gelijk is aan 1.

   (a) (1/2 pt) Bewijs dat de vector $(1, -1, -2)^t$ onder A wordt afgebeeld naar $(1, -2, 1)^t$ of $-(1, -2, 1)^t$. (Hint: merk op dat de vector $(1, -1, -2)^t$ loodrecht staat op $(1, 1, 0)^t$ en $(1, -1, 1)^t$).

   (b) (1/2 pt) Bewijs dat $A : (1, -1, -2)^t \mapsto (1, -2, 1)^t$.

   (c) (1 pt) Bepaal de matrix van A.

5. (a) (1/2 pt) Geef de definitie van een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$.

   Gegeven is een vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ van lengte 1. Het vlak door de oorsprong dat loodrecht op $\mathbf{a}$ staat, geven we aan met V.

   (b) (1/2 pt) Bewijs met de standaardeigenschappen van het uitwendig product dat de afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ een lineaire afbeelding is.

   (c) (1/2 pt) Bewijs dat $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} - \mathbf{x}$.

   (d) (1/2 pt) Bewijs dat $-A^2$ de orthogonale projectie van $\mathbb{R}^3$ op V is.