Lineaire Algebra A, 2e deel, 17 januari 2012

UITWERKINGEN

1. (a) De oppervlakte van de driehoek is gelijk aan de helft van het oppervlak van het parallelogram opgespannen door $(-1,0,2)-(2,1,0)=(-3,-1,2)$ en $(0,2,3)-(2,1,0)=(-2,1,3)$. Daartoe bepalen we het uitproduct $(-3,-1,2)\times(-2,1,3)=(-5,5,-5)$ en de lengte daarvan is $5\sqrt{3}$. Oppervlakte driehoek wordt dus $5\sqrt{3}/2$.

   (b) Voor de berekening van

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

   zijn talloze manieren. Wij kiezen hier een van de kortste. Trek de eerste en derde rij van de laatste af,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a \end{vmatrix} = (1-2a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

   Ontwikkel naar de laatste rij,

$$-(1-2a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = (2a-1)(a-2).$$

2. (a) Eigenwaarde vergelijking:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1-\lambda & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ontwikkel de determinant in de eerste rij

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} - \sqrt{2}\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Dit is gelijk aan

$$(1-\lambda)((1-\lambda)^2-2)-2(1-\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2-4) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1).$$

De eigenwaarden zijn dus $1, -1, 3$.
We bepalen nu de eigenvectoren. Eerst $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Uit dit stelsel vergelijkingen volgt de de vector $(1, 0, -1)$ en alle veelvouden daarvan als eigenvector bij $\lambda = 1$.
Nu $\lambda = -1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Dit stelsel heeft als oplossing de vector $(1, -\sqrt{2}, 1)$ en zijn veelvouden.
Nu $\lambda = 3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Dit stelsel heeft als oplossing de vector $(1, \sqrt{2}, 1)$ en zijn veelvouden.

(b) De gevraagde matrix S heeft als kolommen de eigenvectoren van A. Als S orthogonaal is moeten we de kolommen lengte 1 geven. Dus,

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) Voor elke kolom moeten we een eigenvector van lengte 1 kiezen. Daar zijn er 6 van, namelijk

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1),\ \pm\frac{1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1), \pm\frac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1)$$

en van elk paar moet er precies één voorkomen. Dat geeft $6 \times 8 = 48$ mogelijkheden.

3. (a) We bepalen een basis van V door het stelsel vergelijkingen op te lossen. Dat kan op de standaard manier, het kan ook door op te merken dat het stelsel equivalent is met $x_1 - x_3 + x_5 = 0$ en $x_2 - x_4 = 0$. Een basis krijgen we door x_3, x_4, x_5 gelijk te kiezen aan $(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$ en vervolgens x_1, x_2 uit te rekenen. Dit geeft ons de basis

$$\mathbf{a} = (-1,0,0,0,1),\ \mathbf{b} = (0,1,0,1,0),\ \mathbf{c} = (1,0,1,0,0).$$

(b) Een orthonormale basis krijgen we door het orthogonalisatie procédé toe te passen. De vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ met Gram-matrix,

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Tel een half maal de eerste rij bij de laatste op,

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 \end{array}\right).$$

Een orthonormale basis wordt,

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,0,1),\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0),\ \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,0,1).$$

(c) De projectie van $\mathbf{v} = (1,1,1,1,1)$ op V wordt gegeven door

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_3)\mathbf{f}_3$$

en dat is gelijk aan

$$(0,1,0,1,0) + (2/3)(1,0,2,0,1) = (2/3, 1, 4/3, 1, 2/3).$$

(d) De projectie op $V^\perp$ is gelijk aan

$$(1,1,1,1,1) - (2/3,1,4/3,1,2/3) = (1/3, 0, -1/3, 0, 1/3).$$

4. (a) Omdat een orthogonale afbeelding lengte- en hoekbehoudend is moet het beeld van $(1,-1,-2)^t$ een vector van lengte $\sqrt{6}$ zijn, en loodrecht op de beeldvectoren $(1,0,-1)^t, (1,-1,1)^t$. De vectoren loodrecht op $(1,0,-1),(1,-1,1)$ zijn precies $\lambda(1,-2,1)$. De eis dat de lengte $\sqrt{6}$ betekent dat $|\lambda| = 1$ en dus $\lambda = \pm 1$.

   (b) Geef de matrix van A ook met A aan. Dan geldt

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   Neem aan beide zijden de determinant, $6\det(A) = 6\lambda$. Omdat $\det(A) = 1$ volgt hieruit dat $\lambda = 1$.

   (c) De matrix van A volgt door oplossing van

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Dat kan rechtoe, recht aan. Een slimme manier is om in plaats daarvan de vergelijking

$$A \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

   te bekijken. Dat ziet er inegwikkelder uit, maar de kolommen van de matrices hebben nu lengte 1 en de matrices zijn dus orthogonaal. De inverse van een orthonale matrix is gelijk aan zijn getransponeerde. Dus

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

   en dat is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Definitie lineaire afbeelding, zie diktaat

   (b) Voor willekeurige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt:
   i) $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{y} = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$.
   ii) $A(\lambda\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) = \lambda A(\mathbf{x})$.
   Dus A is een lineaire afbeelding.

   (c) Bewijs door direct uitschrijven.

   (d) De vector $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}$ is de loodrechte projectie van $\mathbf{x}$ op de deelruimte opgespannen door $\mathbf{a}$. Dus is $\mathbf{x} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}$ de loodrechte projectie van $\mathbf{x}$ op V. Maar dit is volgens het voorgaande onderdeel precies $-\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) = -A^2(\mathbf{x})$.