Tentamen Lineaire Algebra
maandag 30-01-2017, 13.30-16.30 uur

- Het is niet toegestaan telefoons, computers, grafische rekenmachines (wel een gewone), dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
- Alle onderdelen van een opgave zijn 1 punt waard behalve als dit anders is vermeld. Totaal kun je 44 punten behalen. Het cijfer van je tentamen is het behaalde aantal punten gedeeld door 4, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger kan zijn dan een 10.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

SUCCES!

1. (a) (4 punten) Bepaal een basis voor de rijruimte $R(A)$ en de kolomruimte $C(A)$ van de volgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ -2 & -5 & 8 & 0 \\ 3 & 11 & -19 & 7 \\ 1 & 7 & -13 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (b) Wat is de rang van A?

   (c) Wat is de dimensie van de nulruimte van A?

   (d) (2 punten) Bepaal vervolgens een basis van de nulruimte $N(A)$ van A.

   (e) Bepaal ook een basis van $A\mathbb{R}^4$, het beeld van de lineaire afbeelding die je krijgt door de matrix op een vector te laten werken.

   (f) Laat op $\mathbb{R}^4$ het standaard inproduct gegeven zijn, toon aan dat $N(A)$ loodrecht staat op $R(A)$.

   (g) Bewijs dat $\mathbb{R}^4 = N(A) \oplus R(A)$.

2. Beschouw de inproductruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ waarbij $\mathbb{R}[x]$ de vectorruimte van polynomen is. Het inproduct $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wordt gegeven door

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx\,.$$

   Laat $W = \text{span}\{1 + x, x^2, x^3\}$.

   (a) (5 punten) Bepaal een orthogonale basis van W.

   (b) Bepaal de lengte van deze basisvectoren.

   (c) (2 punten) Bepaal de orthogonale projectie (= loodrechte projectie) van 1 op W.

(d) Wat is de afstand van 1 tot W?

3. Laat B de volgende matrix zijn

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) (2 punten) Bepaal de nulruimte $N(B)$ van B.

(b) (4 punten) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van B.

(c) (4 punten)Bepaal B^{2017}.

4. Laat $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding zijn, die voldoet aan de eigenschap dat $M^n(\vec{v}) = \vec{0}$ voor alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, maar $M^{n-1}(\vec{w}) \neq \vec{0}$ voor minstens een $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Hierbij is $M^p = M \circ M \circ M \circ \cdots \circ M$, de samenstelling van M p-maal en $M^0 = \mathrm{Id}_n$. Bewijs nu de volgende beweringen:

(a) $\mathrm{Ker}(M^{p-1}) \subseteq \mathrm{Ker}(M^p)$ voor $p = 1, 2, \ldots, n$.

(b) $\mathrm{Im}(M^p) \subseteq \mathrm{Im}(M^{p-1})$ voor $p = 1, 2, \ldots, n$.

(c) $\mathrm{Im}(M^{n-p}) \subseteq \mathrm{Ker}(M^p)$ voor $p = 0, 1, 2, \ldots, n$.

(d) $\mathrm{Im}(M^p) \neq \mathrm{Im}(M^{p-1})$ voor $p = 1, 2, \ldots, n$.

(e) $\mathrm{Ker}(M^{p-1}) \neq \mathrm{Ker}(M^p)$ voor $p = 1, 2, \ldots, n$.

(f) $\dim(\mathrm{Ker}(M^p)) = p$ voor $p = 0, 1, 2, \ldots, n$.

(g) $\dim(\mathrm{Im}(M^{n-p})) = p$ voor $p = 0, 1, 2, \ldots, n$.

(h) $\mathrm{Im}(M^{n-p}) = \mathrm{Ker}(M^p)$ voor $p = 0, 1, 2, \ldots, n$.

5. Beschouw de inproductruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en laat $L : V \to V$ een lineaire afbeelding zijn die voldoet aan $\langle L(\vec{v}), L(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ voor alle vectoren $\vec{v} \in V$.

(a) Toon aan dat $\langle L(\vec{v}), L(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ voor elk willekeurig paar $\vec{v}, \vec{w} \in V$.

(b) (2 punten) Bewijs dat L injectief is.

(c) Bewijs dat als $\dim(V) < \infty$ dat L inverteerbaar is.

(d) (2 punten) Is L ook inverteerbaar als V niet eindig-dimensionaal is? Bewijs je bewering of geef een tegenvoorbeeld.