Tentamen Lineaire Algebra

29 januari 2019, 13:30-16:30 uur

UITWERKINGEN

1. Gegeven een drietal lijnen in $\mathbb{R}^3$ in parametervoorstelling,

$$l : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad n : \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (1/2 pt) Laat zien dat l en m elkaar kruisen (dat wil zeggen niet evenwijdig en elkaar niet snijdend).
Antwoord: De richtingsvectoren van l en m zijn onafhankelijk, dus zijn de lijnen niet parallel. Om te controleren of de lijnen snijden moeten we het stelsel

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oplossen in λ, μ. Hier zijn veel methoden voor. Uit de laatste vergelijking volgt dat $\mu = 0$. De eerste vergelijking met $\mu = 0$ impliceert dat $\lambda = 1$. Maar $\lambda = 1, \mu = 0$ vormen geen oplossing van de tweede vergelijking. De lijnen snijden dus niet.

(b) (1 pt) Bepaal de lijn evenwijdig aan n die zowel l als m snijdt.
Antwoord: Neem voor de onbekende lijn een parametervoorstelling met een willekeurig punt op l als basisvector en $(1, 1, 1)^t$ als richtingvector en parameter ν. Deze lijn moet m snijden, en dus moet

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oplosbaar zijn. Schematisch luidt het stelsel vergelijkingen in λ, μ, ν:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Gauss-eliminatie (uitschrijven) geeft:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat $\nu = -3, \mu = -3, \lambda = 1$. Deze laatste geeft het gewenste steunpunt van de gevraagde lijn. De parametervoorstelling wordt dus $(1, 3, -1)^t + \nu(1, 1, 1)^t$.

2. Zij V de deelruimte in $\mathbb{R}^5$ opgespannen door $(1,1,-1,0,1)^t$ en $(0,1,3,0,0)^t$. In $\mathbb{R}^5$ nemen we het dotproduct als inwendig product.

   (a) (1 pt) Bepaal een orthonormale basis van V.
   Antwoord: We passen Gram-Schmidt toe. De vectoren met de Gram-matrix zien er uit als:
   $$\left(\begin{array}{cc|ccccc} 4 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 10 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
   Een half maal de eerste rij bij de tweede opgesteld:
   $$\left(\begin{array}{cc|ccccc} 4 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 1/2 & 3/2 & 5/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right).$$
   Hieruit lezen we de orthonormale basis $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}(1,1,-1,0,1)^t$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{6}(1,3,5,0,1)^t$ af.

   (b) (1/2 pt) Bepaal de loodrechte projectie van $(1,0,1,0,0)^t$ op V.
   Antwoord: We gebruiken de projectie formule voor de projectie van een vector $\mathbf{v}$: $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2$. Met $\mathbf{v} = (1,0,1,0,0)^t$ geeft dit $\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_1 = 0, \mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_2 = 1$. De projectie wordt dus $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{6}(1,3,5,0,1)^t$.

3. Deze opgave bestaat uit twee delen en gaat over doorsnijdingen van deelruimten.

   (a) (1 pt) Gegeven zijn de volgende deelruimten van $\mathbb{R}^4$:
   - $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
   - $U = \mathrm{Span}((1,2,0,-1)^t, (1,1,2,0)^t, (0,-1,1,1)^t\}$

   Bepaal een basis van $V \cap U$.
   Antwoord: We gaan kijken welke vectoren in het opspansel van U tot V behoren. Dus we vullen de coördinaten van
   $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   in $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ in. We krijgen $2\lambda + 4\mu + \nu = 0$. De oplossingsruimte wordt opgespannen door $(1,0,-2)$ en $(0,1,-4)$. Dat betekent dat $U \cap V$ wordt opgespannen door
   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(b) (1 pt) Zij nu U, V een tweetal deelruimten van $\mathbb{R}^n$ stel dat $\dim(U) + \dim(V) > n$. Bewijs dat $U \cap V$ een vector $\neq \mathbf{0}$ bevat.
Antwoord: Zij $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ een basis van U en $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ een basis van V. Omdat $r+s = \dim(U)+\dim(V) > n$ bestaat er een niet-triviale relatie tussen de vectoren $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$. Schrijf deze als

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \mu_s \mathbf{v}_s.$$

Omdat de relatie niet-triviaal is staat er links en rechts een vector $\neq \mathbf{0}$. Dit impliceert dat $U \cap V$ een niet-triviale vector bevat.

4. Zij V de vectorruimte bestaande uit polynomen van graad ≤ 3. Beschouw de lineaire afbeelding $T : V \to V$ gegeven door $T(p(x)) = (x+1)p'(x) - p(x)$ (hier is $p'(x)$ de afgeleide van $p(x)$).

(a) (1 pt) Bepaal de matrix van T ten opzichte van de geordende basis $\{1, x, x^2, x^3\}$.
Antwoord: We berekenen eenvoudig dat $T(1) = -1, T(x) = 1, T(x^2) = x^2 + 2x, T(x^3) = 2x^3 + 3x^2$. Dit geeft de matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) (1 pt) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren (in polynoomvorm) van T.
Antwoord: Uit het vorige onderdeel zien we dat de matrix van T een bovendriehoeksmatrix is. En dus staan de eigenwaarden op de diagonaal: $-1, 0, 1, 2$. Een eenvoudige berekening geeft de corresponderende eigenvectoren

$$(1,0,0,0)^t, (1,1,0,0)^t, (1,2,1,0)^t, (1,3,3,1)^t.$$

Dit zijn de coördinaatkolommen van de vectoren $1, x+1, x^2+2x+1, x^3+3x^2+3x+1$. Een tweede aanpak: Los de differentiaalvergelijking $(x+1)p'(x) - p(x) = \lambda p(x)$ op. We vinden de algemene oplossing $p(x) = c \cdot (x+1)^{\lambda+1}$ met c een constante. Dit kan alleen een polynoom van graad ≤ 3 zijn als $\lambda \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

5. We beschouwen $\mathbb{R}^3$ als vectorruimte met het dotproduct als inwendig product. Zij $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ een vector met $|\mathbf{a}| = 1$. Beschouw de afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

Hierin zijn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ en $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ het dotproduct en uitwendig product op $\mathbb{R}^3$.

(a) (1/2 pt) Bewijs zonder uitschrijven in coördinaten (dus alleen gebruikmakend van de eigenschappen van inwendig en uitwendig product) dat T een lineaire afbeelding is.

Antwoord: Er geldt voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ dat

$$\begin{aligned} T(\lambda\mathbf{x}) &= (\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{x}))\mathbf{a} + \mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{x}) \\ &= \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{x}) \\ &= \lambda((\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Verder geldt voor elk tweetal $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ dat

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= (\mathbf{a}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}))\mathbf{a} + \mathbf{a}\times(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a} + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{y})\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{x} + \mathbf{a}\times\mathbf{y} \\ &= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

(b) (1 pt) Bewijs dat T een orthogonale afbeelding is. (Ter herinnering: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = |\mathbf{a}||\mathbf{x}|\cos\phi$ en $|\mathbf{a}\times\mathbf{x}| = |\mathbf{a}||\mathbf{x}|\sin\phi$ met ϕ de hoek tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{x}$)

Antwoord: We moeten bewijzen dat voor elke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ geldt $||T(\mathbf{x})|| = ||\mathbf{x}||$. Merk alleerst op dat voor elk tweetal vectoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ en $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$ geldt dat $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$ (Pythagoras). Afleiding:

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2.$$

We gebruiken in de volgende afleiding dat $\mathbf{a}$ en $\mathbf{a}\times\mathbf{x}$ loodrecht op elkaar staan.

$$\begin{aligned} ||T(\mathbf{x})||^2 &= ||(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a}||^2 + ||\mathbf{a}\times\mathbf{x}||^2 \\ &= ||\mathbf{a}||^2||\mathbf{x}||^2\cos^2\phi + ||\mathbf{a}||^2||\mathbf{x}||^2\sin^2\phi \\ &= ||\mathbf{a}||^2||\mathbf{x}||^2 = ||\mathbf{x}||^2. \end{aligned}$$

De laatste stap geldt vanwege het gegeven $||\mathbf{a}|| = 1$.

(c) (1/2 pt) Bewijs dat T een draaiing van 90 graden is met $\mathbf{a}$ als draaiingsas.

Antwoord: De vector $\mathbf{a}$ is een eigenvector met eigenwaarde 1, immers $T(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0}$. Stel nu dat $\mathbf{x}$ loodrecht op $\mathbf{a}$ staat. Dan geldt $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\times\mathbf{x}$. Het beeld van $\mathbf{x}$ staat dus loodrecht op zowel $\mathbf{a}$ als $\mathbf{x}$. Dus draait T de vector $\mathbf{x}$ om een hoek van 90 graden rond de as gegeven door $\mathbf{a}$.

6. Zij V de ruimte van 2×2-matrices met als inwendig product $\langle X, Y\rangle = \text{Spoor}(XY^t)$. Zij M een symmetrische matrix en beschouw de lineaire afbeelding $A : X \mapsto XM + MX$ van V naar zichzelf.

(a) (1 pt) Bewijs dat A een symmetrische afbeelding is (je mag gebruikmaken van het feit dat $\text{Spoor}(PQ) = \text{Spoor}(QP)$).

Antwoord: We moeten controleren dat $\text{Spoor}(XA(Y)^t) = \text{Spoor}(A(X)Y^t)$ voor alle $X, Y \in V$.

$$\begin{aligned} \text{Spoor}(XA(Y)^t) &= \text{Spoor}(X(YM+MY)^t) = \text{Spoor}(X(M^tY^t + Y^tM^t)) \\ &= \text{Spoor}(XMY^t) + \text{Spoor}(XY^tM) \\ &= \text{Spoor}(XMY^t + MXY^t) \\ &= \text{Spoor}(A(X)Y^t) \end{aligned}$$

(b) (**bonusvraag**: 1 pt) Stel dat de λ, μ de eigenwaarden van M zijn. Bewijs dat de eigenwaarden van A worden gegeven door $2\lambda, 2\mu, \lambda + \mu, \lambda + \mu$ (hint: probeer het eerst met M gelijk aan een diagonaalmatrix).

Antwoord: We moeten oplossen $MX + XM = \Lambda X$ in $\Lambda \in \mathbb{R}$ en $M \in V$. Stel eerst dat $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ en $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Dan gaat $MX + XM$ over in

$$\begin{pmatrix} 2\lambda p & (\lambda + \mu)q \\ (\lambda + \mu)r & 2\mu s \end{pmatrix}.$$

We zien dat de vier matrices

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onafhankelijke eigenvectoren zijn met eigenwaarden $2\lambda, \lambda + \mu, \lambda + \mu, 2\mu$.

NU het algemene geval. Omdat M symmetrisch is, is er een inverteerbare 2×2 matrix S z'o dat $S^{-1}MS$ diagonaal is. De matrices SX_iS^{-1} vormen dan de gevraagde eigenvectoren.