Herkansing Lineaire Algebra

15 april 2019, 17:00-20:00 uur

- Bij dit tentamen mogen dictaten en boeken niet gebruikt worden.
- Een eenvoudige rekenmachine, hoewel niet nodig, is toegestaan, maar geen grafische rekenmachine of smartphone.
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
- Veel succes!

1. De punten A, B, C, D in $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven door:

$$A : \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C : \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Zij V het vlak door de punten B, C, D.

   (a) (1 pt) Bepaal het oppervlak van de driehoek met hoekpunten B, C, D.

   (b) (1/2 pt) Bepaal de vergelijking van het vlak V.

   (c) (1 pt) Bepaal de afstand van A tot het vlak V.

2. In $\mathbb{R}^4$ is gegeven de deelruimte W gegeven door de vergelijkingen $x_4 = 2x_1 - 2x_2$ en $x_3 = -x_1 + 2x_2$.

   (a) (1 pt) Construeer een orthonormale basis van W.

   (b) (1/2 pt) Bereken de orthogonale projectie van $(1, 2, 3, 4)$ op W

   (c) (1/2 pt) Geef een basis van de deelruimte van vectoren die loodrecht staan op alle vectoren in W.

Z.O.Z.

3. Met $\mathbb{R}[x]$ geven we de vectorruimte van alle polynomen met reële coëfficienten aan, en met $\mathbb{R}[x]_n$ de deelruimte van alle polynomen met graad $\leq n$.

   (a) (1 pt) Geef van de volgende twee deelverzamelingen aan of ze lineaire deelruimte van $\mathbb{R}[x]$ zijn of niet, en leg uit waarom.

$$\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(-1) = 1\}$$
$$\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(-1) = 0\}$$

   (b) (1/2 pt) Bepaal de rang en een basis van het opspansel van de vectoren

$$1 - 2x + x^2, x - 2x^2 + x^3, 1 + x^2 - 2x^3, -2 + x + x^3 \in \mathbb{R}[x]$$

   De lineaire afbeelding $D : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ wordt gegeven door

$$D : p(x) \mapsto xp''(x) + (x+1)p'(x) - p(x),$$

   waarin het accent differentiatie naar x betekent.

   (c) (1/2 pt) Geef de matrix van D ten opzichte van de geordende standaardbasis $1, x, x^2$ van $\mathbb{R}[x]_2$.

   (d) (1 pt) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van D. Schrijf de eigenvectoren als elementen van $\mathbb{R}[x]$ op.

4. Laat $V = \mathbb{R}^3$ met daarop het standaard inproduct (dot-product). Laat $\mathbf{a} \in V$ een vector $\neq \mathbf{0}$ zijn en definieer $T : V \to V$ door

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\,\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a}.$$

   (a) (1/2 pt) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.

   (b) (1/2 pt) Laat zien dat T orthogonaal is.

   (c) (1/2 pt) Laat zien dat T symmetrisch is.

   (d) (1 pt) Bepaal de eigenwaarden van T en de dimensies van de bijbehorende eigenruimten.