Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2004/2005 gegeven door J. Stienstra.

# Uitwerking[1] Lineaire Algebra, deel 2 (WISB121)
# 31 januari 2005

## Opgave 1

a) Geef een basis voor de kern (= nullspace) van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*N.B. Je moet hier ook echt laten zien dat dit een basis is.*

**Uitwerking**
De kern van deze matrix is de ruimte van oplossingen van het homogene stelsel $A\vec{x} = \vec{0}$.
Veeg $A$ naar echelonvorm:
$2^e$ rij $-1^e$ rij, $3^e$ rij $+1^e$ rij geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$3^e$ rij $+\frac{1}{2} \cdot 2^e$ rij, deel $2^e$ rij door 6 geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tot slot: $1^e$ rij $+3 \cdot 2^e$ rij geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dus

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \quad &\rightarrow \quad x_1 = x_2 + 2x_4 \\ x_3 - x_4 = 0 \quad &\rightarrow \quad x_3 = x_4 \end{aligned}$$

Dus voor een vector in de kern van $A$ is

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dit betekent dat $ker(A)$ wordt opgespannen door de vectoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@A-Eskwadraat.nl`

Deze twee vectoren zijn lineair onafhankelijk, want

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

en deze vector is slechts gelijk aan de nulvector als $a_1 = a_2 = 0$. Omdat de twee genoemde vectoren $ker(A)$ opspannen en lineair onafhankelijk zijn, vormen ze een basis van $ker(A)$.

b) Bepaal de rang (= rank) van $A$.

**Uitwerking**
$A$ is een $2 \times 4$-matrix en $dim(ker(A)) = 2$. Dus is $rang(A) = 4 - 2 = 2$.

## Opgave 2

a) Bepaal de eigenwaarden van de matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Uitwerking**
Het karakteristieke polynoom van $B$ is

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1-\lambda & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(-1-\lambda) - \tfrac{1}{2}(1-\lambda) - \lambda \\ &= \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) \end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn dus $0, 1, -1$.

b) Bepaal bij elke eigenwaarde de eigenvectoren.

**Uitwerking**
Eigenvectoren bij eigenwaarde 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x_1 = x_2,\ x_3 = 0$$

$$\rightarrow \text{eigenvectoren } a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ met } a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Eigenvectoren bij eigenwaarde 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x_3 = -2x_2,\ x_1 = 3x_2$$

$$\rightarrow \text{eigenvectoren } a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ met } a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Eigenvectoren bij eigenwaarde $-1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x_3 = -2x_1,\ x_2 = 3x_1$$

$$\rightarrow \text{eigenvectoren } a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ met } a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

c) Geef een inverteerbare matrix $S$ en een diagonaalmatrix $D$ zodat $B = SDS^{-1}$. Laat zien dat de $S$ die je geeft ook echt inverteerbaar is.

**Uitwerking**
Neem

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$S$ is inverteerbaar, want $\det S = -2 - 2 + 6 + 6 \neq 0$.

d) Laat zien dat $B^9 = B$.

**Uitwerking**
$B^9 = SD^9S^{-1} = SDS^{-1} = B$

e) Bepaal de oplossing $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{array}{rcl} x_1' & = & x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2' & = & x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_3' & = & -x_1 + x_2 \end{array},$$

die ook nog voldoet aan de voorwaarde $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Uitwerking**
Het stelsel differentiaalvergelijkingen kan worden geschreven als

$$\vec{x}' = B\vec{x} = SDS^{-1}\vec{x}$$

Schrijf $\vec{y} = S^{-1}\vec{x}$, dan $\vec{y}' = D\vec{y}$. Oftewel:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{array}{rcl} y_1' & = & 0 \\ y_2' & = & y_2 \\ y_3' & = & -y_3 \end{array}$$

Dit betekent:

$$\begin{array}{rcl} y_1(t) & = & c_1 \\ y_2(t) & = & c_2e^t \\ y_3(t) & = & c_3e^{-t} \end{array}$$

met constanten $c_1, c_2, c_3$. Dus

$$\vec{x}(t) = S\vec{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Om ook nog te voldoen aan de voorwaarde $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ moeten de constanten $c_1, c_2, c_3$ voldoen aan

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oftewel

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to c_2 = c_3 = -\tfrac{1}{4},\ c_1 = 1$$

Dus de gezochte vectorfunctie is

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{4} e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{4} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

## Opgave 3

In deze opgave is $F$ de lineaire ruimte van alle funkties op $\mathbb{R}$ met waarden in $\mathbb{R}$.

a) Is de verzameling, bestaande uit die funkties $f$ die voldoen aan $|f(x)| \leq 1 + |x|$, een lineaire deelruimte van $F$? Geef een duidelijke motivering voor je antwoord!

**Uitwerking**
De verzameling functies is niet een deelruimte van $F$, want de functie $g(x) = 1 + |x|$ zit in deze verzameling, maar $2g(x)$ zit er niet in.

b) Zijn de drie funkties $x^2$, $|x|$ en $1 - \cos(\pi x)$ lineair onafhankelijk? Geef een duidelijke motivering voor je antwoord!

**Uitwerking**
Als voor alle $x$ $\quad ax^2 + b|x| + c(1 - \cos(\pi x)) = 0$, dan geldt i.h.b.

$$\begin{array}{lrcl} \text{voor } x = \frac{1}{2}: & \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c & = & 0 \\ \text{voor } x = 1: & a + b + 2c & = & 0 \\ \text{voor } x = 2: & 4a + 2b & = & 0 \end{array}$$

Door de tweede vergelijking min tweemaal de eerste vergelijking te nemen zie je $a = 0$.
Dan levert de derde vergelijking vervolgens $b = 0$.
En tenslotte levert de eerste vergelijking $c = 0$.

Dus uit $ax^2 + b|x| + c(1 - \cos(\pi x)) = 0$ voor alle $x$, volgt $a = b = c = 0$, d.w.z. de genoemde functies zijn lineair onafhankelijk.

c) Neem $V = \text{Span}\{x^2, |x|, 1-\cos(\pi x)\}$. Zij $W$ de verzameling, bestaande uit die funkties $f \in V$ die voldoen aan $f(1) = 0$.
Laat zien dat $W$ een lineaire deelruimte is van $V$.

**Uitwerking**
De constante functie 0 zit in $W$, dus $W \neq \emptyset$.
Als $f, g \in W$, dan is $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$, dus $f + g \in W$.,
Als $f \in W$ en $r \in \mathbb{R}$, dan is $(rf)(1) = rf(1) = r0 = 0$, dus $rf \in W$.

$W$ is een niet-lege deelverzameling van $V$, die gesloten is onder optelling en scalaire vermenigvuldiging. Dit bewijst dat $W$ een lineaire deelruimte is van $V$.

d) Geef een basis voor de lineaire ruimte $W$.

**Uitwerking**
Neem $f \in V$, zeg $f(x) = ax^2 + b|x| + c(1-\cos(\pi x))$. Veronderstel $f(1) = 0$. Dan is $a + b + 2c = 0$. Dus

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De ruimte $W$ wordt dus opgespannen door de functies $-x^2 + |x|$ en $-2x^2 + 1 - \cos(\pi x)$. Deze functies zijn lineair onafhankelijk, want als $b(-x^2 + |x|) + c(-2x^2 + 1 - \cos(\pi x)) = 0$ voor alle $x$, dan is volgens vraag b) $b = c = 0$.

## Opgave 4

In deze opgave is $\mathsf{P}_2$ de lineaire ruimte van veeltermen met graad $\leq 2$ (=polynomials of degree at most 2) met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. We bekijken de afbeelding $T : \mathsf{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$, hier is $p(n)$ de waarde van de veelterm(-funktie) $p$ in het punt $n$.

a) Laat zien dat $T$ een lineaire afbeelding (= linear transformation) is.

**Uitwerking**
Als $p_1, p_2 \in \mathsf{P}_2$, dan is

$$\begin{aligned} T(p_1 + p_2) &= \begin{pmatrix} (p_1+p_2)(0) \\ (p_1+p_2)(1) \\ (p_1+p_2)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(0) + p_2(0) \\ p_1(1) + p_2(1) \\ p_1(2) + p_2(2) \end{pmatrix} \\ &= T(p_1) + T(p_2) \end{aligned}$$

Als $p \in \mathsf{P}_2$ en $r \in \mathbb{R}$, dan is

$$T(rp) = \begin{pmatrix} rp(0) \\ rp(1) \\ rp(2) \end{pmatrix} = rT(p)$$

b) In $\mathsf{P}_2$ nemen we de basis $(1, x, x^2)$. In $\mathbb{R}^3$ nemen we de basis $(e_1, e_2, e_3)$ met $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Je hoeft *niet* te laten zien dat dit bases zijn.
Bepaal de matrix van $T$ ten opzichte van deze bases.

**Uitwerking**
De matrix van $T$ t.o.v. deze bases is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Bepaal een veelterm $p$ die voldoet aan $T(p) = e_1$.

**Uitwerking**
Neem $f(x) = (x-1)(x-2)$. Dan is $f(1) = 0, f(2) = 0$, en $f(0) = 2$. We zien dat de veelterm $p(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$ voldoet aan $T(p) = e_1$.

d) Bepaal $\ker(T)$.

**Uitwerking**

$$\ker(T) = \left\{ a + bx + cx^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} a = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a + 2b + 4c = 0 \end{array} \right\}$$

Uit deze vergelijkingen volgt $a = b = c = 0$, dus $\ker(T) = \{0\}$.

e) Bewijs dat $T$ een isomorfisme is.
*N.B. isomorfisme = isomorphism = inverteerbaar = invertible = bijektief = one-to-one and onto.*

**Uitwerking**
Uit opgave d) volget dat $T$ injectief is.
Analoog aan opgave c) zien we dat $T(-x(x-2)) = e_2$, en $T(\frac{1}{2}x(x-1)) = e_3$. We zien dat $e_1, e_2, e_3$ in het beeld van $T$ zitten. Omdat het beeld van $T$ een lineaire deelruimte is van $\mathbb{R}^3$, die $e_1, e_2$, en $e_3$ bevat, moet het beeld van $T$ gelijk zijn aan $\mathbb{R}^3$. Dus $T$ is surjectief.

Omdat $T$ injectief en surjectief is, is $T$ een isomorfisme.