Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2004/2005 gegeven door J. Stienstra.

# Lineaire Algebra, hertentamen (WISB121)
# 24 maart 2005

## Opgave 1

In deze opgave werken we met de matrix $A$ en de kolomvektoren $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Verder is $A^T$ de gespiegelde (=transpose) van matrix $A$ en is $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, het uitprodukt (=*cross product*) van $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$. Ook $\mathbf{a}$ is een kolom vektor.

a) Laat zien $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$,
d.w.z. $\mathbf{b}$ staat loodrecht (=perpendicular=orthogonal) op $\mathbf{c}$.

b) Bereken de drie vektoren $\mathbf{a}$, $A^T\mathbf{b}$ en $A^T\mathbf{c}$.

c) Laat zien dat voor de lengte (=*norm* = *magnitude*) van de vektor $\mathbf{a}$ geldt $\| \mathbf{a} \|^2 = \det(A^T A)$.

d) Laat zien dat $\mathbf{a}$ in de kern (=nullspace) van $A^T$ zit.

e) Laat zien dat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ eigenvektoren zijn van de matrix $A\,A^T$. Bereken de bijbehorende eigenwaarden.
*Opmerking: Gebruik onderdelen b. en d. en verspil geen tijd aan het expliciet berekenen van $A\,A^T$.*

f) Bereken $\det(A\,A^T)$.

## Opgave 2

In deze opgave werken we met de matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en zijn $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ de kolommen van $A$.

a) Bepaal een basis voor de kern (=nullspace) van $A$.

b) Bepaal de rang (=rank) van $A$.

c) Ga na of de kolomvektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in het opspansel (=span) van de kolomvektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ zit.

## Opgave 3

a) Bepaal de eigenwaarden van de matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Geef een basis van $\mathbb{R}^3$, die bestaat uit eigenvektoren van $B$.

c) Geef een inverteerbare matrix $S$ en een diagonaalmatrix $D$ zo dat $B = SDS^{-1}$.

d) Bepaal alle oplossingen $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{array}{rcrrr} x_1' & = & 2x_1 & +2x_2 & +5x_3 \\ x_2' & = & 3x_1 & +2x_2 & +5x_3 \\ x_3' & = & -3x_1 & +2x_2 & +2x_3 \end{array}$$

## Opgave 4

In deze opgave is $\mathsf{P}_3$ de lineaire ruimte van veeltermen met graad $\leq 3$ (=polynomials of degree at most 3) met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Definieer voor $f \in \mathsf{P}_3$ de funktie $T(f)$ door

$$(T(f))(x) = f''(x) - 2xf'(x) - f(x)\,;$$

hier zijn $f'$ en $f''$ de eerste en tweede afgeleide van $f$. Je mag verder zonder meer gebruiken dat met $f$ ook $T(f)$ in $\mathsf{P}_3$ zit. We hebben dus een afbeelding $T : \mathsf{P}_3 \to \mathsf{P}_3$.

a) Laat zien dat $T$ een lineaire afbeelding is.

b) Geef de matrix van $T$ t.o.v. de basis $(1, x, x^2, x^3)$ van $\mathsf{P}_3$ (Je hoeft niet te laten zien dat dit een basis is).

c) Bewijs dat $T$ inverteerbaar (=invertible) is.

## Opgave 5

In deze opgave is $F$ de lineaire ruimte van alle funkties op $\mathbb{R}$ met waarden in $\mathbb{R}$.

a) Is de verzameling, bestaande uit die funkties $f$ die voldoen aan $f(0) = 1$, een lineaire deelruimte van $F$? Geef een duidelijke motivering voor je antwoord!

b) Zijn de drie funkties $x$, $e^x$ en $\cos(\pi x)$ lineair onafhankelijke elementen van $F$? Geef een duidelijke motivering voor je antwoord!

c) Neem $V = \text{Span}\{x, e^x, \cos(\pi x)\}$. Zij $W$ de verzameling, bestaande uit die funkties $f \in V$ die voldoen aan $f(0) = 0$ en $f(1) = 0$.
Laat zien dat $W$ een lineaire deelruimte is van $V$.

d) Geef een basis voor de lineaire ruimte $W$.