MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE TBC VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE WISB121 WERD IN 2004/2005 GEGEVEN DOOR J. STIENSTRA.

Uitwerking[1] Lineaire Algebra, hertentamen (WISB121) 24 maart 2005

Opgave 1

In deze opgave werken we met de matrix A en de kolomvektoren $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Verder is A^T de gespiegelde (=transpose) van matrix A en is $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, het uitprodukt (=*cross product*) van $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$. Ook $\mathbf{a}$ is een kolom vektor.

a) Laat zien $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$,
d.w.z. $\mathbf{b}$ staat loodrecht (=perpendicular=orthogonal) op $\mathbf{c}$.

b) Bereken de drie vektoren $\mathbf{a}$, $A^T\mathbf{b}$ en $A^T\mathbf{c}$.

c) Laat zien dat voor de lengte (=*norm* = *magnitude*) van de vektor $\mathbf{a}$ geldt $\| \mathbf{a} \|^2 = \det(A^T A)$.

d) Laat zien dat $\mathbf{a}$ in de kern (=nullspace) van A^T zit.

e) Laat zien dat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ eigenvektoren zijn van de matrix $A\,A^T$. Bereken de bijbehorende eigenwaarden.
Opmerking: Gebruik onderdelen b. en d. en verspil geen tijd aan het expliciet berekenen van $A\,A^T$.

f) Bereken $\det(A\,A^T)$.

Antwoorden:

a) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 3.1 - 3.2 + 1.3 = 0$, dus $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$.

b)
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$$
$$A^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$A^T\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

c) $\| \mathbf{a} \|^2 = 121 + 64 + 81 = 266$
$A^T A = \begin{pmatrix} 19 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$, dus $\det(A^T A) = 266$.
Dus inderdaad $\| \mathbf{a} \|^2 = \det(A^T A)$.

d) $A^T\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Dus inderdaad $\mathbf{a} \in$ kern A^T.

[1]Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@A-Eskwadraat.nl`

e) $(AA^T)\mathbf{a} = A(A^T\mathbf{a}) = 0$, dus $\mathbf{a}$ is eigenvector bij eigenwaarde 0.
$(AA^T)\mathbf{b} = A(A^T\mathbf{b}) = A\begin{pmatrix} 19 \\ 0 \end{pmatrix} = 19\mathbf{b}$, dus $\mathbf{b}$ is eigenvector bij eigenwaarde 19.
$(AA^T)\mathbf{c} = 14\mathbf{c}$, dus $\mathbf{c}$ is eigenvector bij eigenwaarde 14.

f) $\det(AA^T) = 0 \cdot 19 \cdot 14 = 0$.

Opgave 2

In deze opgave werken we met de matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en zijn $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ de kolommen van A.

a) Bepaal een basis voor de kern (=nullspace) van A.

b) Bepaal de rang (=rank) van A.

c) Ga na of de kolomvektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in het opspansel (=span) van de kolomvektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ zit.

Antwoorden:

a) We moeten eerst de oplossingen van het homogene stelsel $Ax = 0$ bepalen.
Vegen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 & = & -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ x_3 & = & x_3 \\ x_4 & = & x_4 \end{array}$$

Dus:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Een basis voor kern A is $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) rank $A = 4 - \dim\ \text{kern}\ A = 2$.

c) We herhalen de veegprocedure voor $A \mid b$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

De onderste regel laat zien dat $\mathbf{b}$ *niet* in $\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ zit.

Opgave 3

a) Bepaal de eigenwaarden van de matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Geef een basis van $\mathbb{R}^3$, die bestaat uit eigenvektoren van B.

c) Geef een inverteerbare matrix S en een diagonaalmatrix D zo dat $B = SDS^{-1}$.

d) Bepaal alle oplossingen $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{array}{rcrrr} x_1' & = & 2x_1 & +2x_2 & +5x_3 \\ x_2' & = & 3x_1 & +2x_2 & +5x_3 \\ x_3' & = & -3x_1 & +2x_2 & +2x_3 \end{array}$$

Antwoorden:

a) $\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 5 \\ 3 & 2-\lambda & 5 \\ -3 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$
$= (2-\lambda)^3 + 30 - 30 + 15(2-\lambda) - 10(2-\lambda) - 6(2-\lambda)$
$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right)$
$= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)$
De eigenwaarden zijn 1, 2 en 3.

b) *Eigenvectoren bij eigenwaarde 1*:

$$B - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{veeg}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Een eigenvector is $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eigenvectoren bij eigenwaarde 2:

$B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to$ een eigenvector is $\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dus ook $\begin{pmatrix} -10 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix}$ is een eigenvector.

Eigenvectoren bij eigenwaarde 3:

$$B - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{veeg}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 20 \\ 0 & -4 & -16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Een eigenvector is $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De vectoren $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ vormen een basis van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvectoren.

Opmerking: Dit is een basis omdat er een stelling is die zegt dat eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden lineair onafhankelijk zijn.

c)

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -10 & -3 \\ -2 & -15 & -4 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

d) Het stelsel is $x' = Bx$. Verder is $B = SDS^{-1}$. Laat nu $y = S^{-1}x$, dan is $y' = Dy$, d.w.z. $y_1' = y_1$, $y_2' = 2y_2$, $y_3' = 3y_3$.
Dus $y_1 = c_1 e^t$, $y_2 = c_2 e^{2t}$, $y_3 = c_3 e^{3t}$ met constanten c_1, c_2, c_3.
Voor $\mathbf{x}$ vinden we dan

$$\mathbf{x}(t) = S \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{3t} \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -10 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4

In deze opgave is P_3 de lineaire ruimte van veeltermen met graad ≤ 3 (=polynomials of degree at most 3) met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Definieer voor $f \in \mathsf{P}_3$ de funktie $T(f)$ door

$$(T(f))(x) = f''(x) - 2xf'(x) - f(x);$$

hier zijn f' en f'' de eerste en tweede afgeleide van f. Je mag verder zonder meer gebruiken dat met f ook $T(f)$ in P_3 zit. We hebben dus een afbeelding $T : \mathsf{P}_3 \to \mathsf{P}_3$.

a) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.

b) Geef de matrix van T t.o.v. de basis $(1, x, x^2, x^3)$ van P_3 (Je hoeft niet te laten zien dat dit een basis is).

c) Bewijs dat T inverteerbaar (=invertible) is.

Antwoorden:

a) Voor $f, g \in \mathsf{P}_3$ is voor alle $x \in \mathbb{R}$

$$T(f+g)(x) = f''(x) + g''(x) - 2x(f'(x) + g'(x)) - (f(x) + g(x)) = (Tf + Tg)(x)$$

Dus $T(f+g) = Tf + Tg$.
Voor $f \in \mathsf{P}_3$ en $c \in \mathbb{R}$ is

$$T(cf)(x) = cf''(x) - c\,2xf'(x) - cf(x) = c(Tf)(x).$$

Dus $T(cf) = c(Tf)$.
Conclusie: T is een lineaire afbeelding.

b)
$$\begin{aligned} T(1) &= -1 \\ T(x) &= -2x - x = -3x \\ T(x^2) &= 2 - 4x^2 - x^2 = 2 - 5x \\ T(x^3) &= 6x - 6x^3 - x^3 = 6 - 7x^3 \end{aligned}$$

De matrix is

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

c) De determinant van deze matrix is $105 \neq 0$. Dus is T inverteerbaar.

Opgave 5

In deze opgave is F de lineaire ruimte van alle funkties op $\mathbb{R}$ met waarden in $\mathbb{R}$.

a) Is de verzameling, bestaande uit die funkties f die voldoen aan $f(0) = 1$, een lineaire deelruimte van F? Geef een duidelijke motivering voor je antwoord!

b) Zijn de drie funkties x, e^x en $\cos(\pi x)$ lineair onafhankelijke elementen van F? Geef een duidelijke motivering voor je antwoord!

c) Neem $V = \mathrm{Span}\{x, e^x, \cos(\pi x)\}$. Zij W de verzameling, bestaande uit die funkties $f \in V$ die voldoen aan $f(0) = 0$ en $f(1) = 0$.
Laat zien dat W een lineaire deelruimte is van V.

d) Geef een basis voor de lineaire ruimte W.

Antwoorden:

a) Dit is geen lineaire deelruimte, bijvoorbeeld omdat de nulfunctie er niet in zit.

b) Stel er is een lineaire combinatie $ax + b\mathrm{e}^x + c\cos\pi x$ die de nulfunctie is.
Vul dan achtereenvolgens voor x in $0, 1, -1$:

$$\begin{array}{rcl} b+c & = & 0 \\ a+b\mathrm{e}-c & = & 0 \\ -a+b\mathrm{e}^{-1}-c & = & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} b+c & = & 0 \\ a+b(\mathrm{e}+1) & = & 0 \\ -a+b(\mathrm{e}^{-1}+1) & = & 0 \end{array}$$

$\rightarrow b(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}+2) = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow c = 0, a = 0.$
Dit bewijst dat de functies $x, \mathrm{e}^x, \cos\pi x$ lineair onafhankelijk zijn.

c)
1. de nulfunctie zit in W
2. als $f, g \in W$ dan $f + g \in V$ en

$$\begin{array}{rcccl} (f+g)(0) & = & f(0)+g(0) & = & 0 \\ (f+g)(1) & = & f(1)+g(1) & = & 0 \end{array}$$

   Dus $f + g \in W$.
3. als $f \in W$ en $a \in \mathbb{R}$ dan $af \in V$ en $af(0) = 0$, $af(1) = 0$.
   Dus $af \in W$.

d) Zij $f \in W$, dan $f(x) = ax + b\mathrm{e}^x + c\cos\pi x$ voor zekere $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} f(0) & = & 0 & \text{dus} & b+c & = & 0 & \rightarrow & b & = & -c \\ f(1) & = & 0 & & a+b\mathrm{e}-c & = & 0 & \rightarrow & a & = & (\mathrm{e}+1)c \end{array}$$

Dus een basis van W is de functie $(\mathrm{e}+1)x - \mathrm{e}^x + \cos\pi x$.