Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2005/2006 gegeven door Dhr. J. Stienstra.

Uitwerking[1] Lineaire Algebra (WISB121)
08 november 2005

- Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer. Schrijf op het eerste vel ook het nummer van je praktikumgroep of de naam van je praktikumleid(st)er (Benno van den Berg, Igor Grubisic, Charlene Kalle, Oliver Lorscheid, Vincent van der Noort, Joost Rommes, Rogier Swierstra , Ittay Weiss) .
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- **Succes!**

Opgave 1

Bereken de determinant van de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Antwoord:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= 1(5\cdot 9 - 8\cdot 6) - 2(4\cdot 9 - 7\cdot 6) + 3(4\cdot 8 - 5\cdot 7) \\ &= (45-48) - 2(36-42) + 3(32-35) \\ &= -3 + 12 - 9 = 0 \end{aligned}$$

Opgave 2

Neem de twee (rij-)vectoren $\vec{a} = (-7, 6, 1)$ en $\vec{b} = (1, -1, 3)$ in $\mathbb{R}^3$.

a) Bereken het uitproduct (= cross product) $\vec{a} \times \vec{b}$.

Antwoord:

Om $\vec{a} \times \vec{b}$ te berekenen, nemen we de matrix $\begin{pmatrix} i & j & k \\ -7 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. De "determinantregel" geeft dan $\vec{a} \times \vec{b} = (19, 22, 1)$.

b) Bereken de oppervlakte van de driehoek in $\mathbb{R}^3$ met hoekpunten $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{a} + \vec{b}$.

Antwoord:

De oppervlakte van de driehoek $\Delta(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$ is de helft van de oppervlakte van het door $\vec{a}$ en $\vec{b}$ opgespannen parallellogram en is dus

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}||\vec{a} \times \vec{b}|| &= \tfrac{1}{2}\sqrt{19^2 + 22^2 + 1} \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{361 + 484 + 1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{846} \\ &= 14,5430\ldots \end{aligned}$$

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@A-Eskwadraat.nl

Opgave 3

a) Geef alle oplossingen van het volgende stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = & 1 \\ x_1 & +3x_2 & -5x_3 & -7x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +5x_2 & -x_3 & -10x_4 & = & 1 \end{array}$$

Antwoord:

We beginnen met het vegen naar gereduceerde rij echelonvorm.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & -7 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & -10 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3^{\text{e}} - 2\cdot 1^{\text{e}} \text{ rij}]{2^{\text{e}} - 1^{\text{e}} \text{ rij}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -9 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[3^{\text{e}} - 2^{\text{e}} \text{ rij}]{1^{\text{e}} - 2\cdot 2^{\text{e}} \text{ rij}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 22 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -9 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longleftarrow \text{gereduceerde rij echelonvorm}$$

De vergelijkingen komen dus neer op:

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & 3 & -22x_3 & -5x_4 \\ x_2 & = & -1 & +9x_3 & +4x_4 \\ x_3 & = & & x_3 & \\ x_4 & = & & & x_4 \end{array}$$

oftewel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -22 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dit is de algemene oplossing; x_3 en x_4 zijn vrij te kiezen parameters.

b) Geef een basis voor de rijenruimte (= row space) van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -5 & -7 \\ 2 & 5 & -1 & -10 \end{pmatrix}.$$

Antwoord:

Een basis van de rijenruimte van A wordt gevormd door de niet-nul rijen van de (gereduceerde) rij echelonvorm.

$$\text{Dus : } (1, 0, 22, 5) \text{ en } (0, 1, -9, -1)$$

c) Geef een basis voor de kolommenruimte (= column space) van de matrix A.

Antwoord:

Een basis voor de kolommenruimte van A wordt gevormd door die kolommen van A, die in de echelon vorm een pivot bevatten.

$$\text{Dus : } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d) Geef een basis voor de nulruimte (= nullspace) van de matrix A.

Antwoord:

Een basis voor de nulruimte van A wordt gevormd door de kolomvectoren die met een parameter ervoor optreden in de algemene oplossing van het stelsel in onderdeel a).

$$\text{Dus : } \begin{pmatrix} -22 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) Wat is de rang (= rank) van de matrix A?

Antwoord:

De rang van de matrix A is de dimensie van de kolommen- (of rijen-)ruimte van A.

Dus $\text{rank}(A) = 2$.

Opgave 4

We bekijken de volgende kolomvectoren in $\mathbb{R}^4$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Zit de vector $\vec{v}_4$ in het opspansel van de vectoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$?

Antwoord:

De vraag komt erop neer of het stelsel $x, \vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{v}_4$ een oplossing heeft of niet.

Vegen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 5 & 10 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 98 \end{array}\right)$$

De onderste regel in de laatste matrix laat zien dat het stelsel geen oplossing heeft. $\vec{v}_4$ zit *niet* in het opspansel van $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

b) Zijn de vectoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ lineair onafhankelijk?

Antwoord:

De vraag is nu of het stelsel $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 + x_4\vec{v}_4 = 0$ een oplossing heeft. Hiervoor kunnen we het bovenstaande "veegverhaal" ongewijzigd overnemen (alleen de lijn tussen de 3$^{\text{e}}$ en 4$^{\text{e}}$ kolom weglaten).

De echelonvorm heeft 3 pivots en 4 kolommen. Dus is er een oplossing $\neq \vec{0}$. Conclusie: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ zijn afhankelijk.

Opgave 5

Laat zien dat de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ inverteerbaar is en bereken de inverse matrix A^{-1}.

Antwoord:
Berekening van A^{-1} door vegen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Dus

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Opgave 6

Gegeven zijn de (rij-)vectoren $\vec{a} = (1,0,1)$ en $\vec{b} = (0,1,1)$ in $\mathbb{R}^3$.

a) Bepaal de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Antwoord:

Noem θ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Dus: $||\vec{a}|| = \sqrt{2}$, $\quad ||\vec{b}|| = \sqrt{2}$, $\quad a \cdot b = ||a|| \cdot ||b|| \cos\theta$.

$a \cdot b = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$.

Dus: $\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$.

b) Bepaal alle vectoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ met lengte (= norm = magnitude) gelijk aan 1, die met zowel $\vec{a}$ als $\vec{b}$ een hoek (= angle) van 45° ($= \frac{1}{4}\pi$) maken.

Antwoord:

We weten $||x|| = 1$, $\quad ||a|| = \sqrt{2}$, $\quad ||b|| = \sqrt{2}$, $\quad \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Verder:

$x \cdot a = ||x||\ ||a|| \cos 45^\circ = 1$

$x \cdot b = ||x||\ ||b|| \cos 45^\circ = 1$

Kortom $x = (x_1, x_2, x_3)$ moet voldoen aan

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 + x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1 - x_3 \\ \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow (1-x_3)^2 + (1-x_3)^2 + x_3^2 = 1$$

oftewel $1 - 2x_3 + x_3^2 + 1 - 2x_3 + x_3^2 + x_3^2 + x_3^2 = 1$

$1 - 4x_3 + 3x_3^2 = 0$.

wortels: $\dfrac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \dfrac{4 \pm 2}{6} = 1$ of $\frac{1}{3}$.

Er zijn twee vectoren die voldoen, namelijk $(0,0,1)$ en $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Opgave 7

Voor twee vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^{125}$ is gegeven

$$\|\,\vec{u}\,\| = 3\,, \qquad \|\,\vec{v}\,\| = 1\,, \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{3}\,.$$

Bereken $\|\,\vec{u} + 3\,\vec{v}\,\|$.

N.B. $\|\,\vec{u}\,\|$ is de lengte (= norm = magnitude) van de vector $\vec{u}$ en $\vec{u} \cdot \vec{v}$ is het inproduct (= dot product) van $\vec{u}$ en $\vec{v}$.

Antwoord:

$$\begin{aligned} ||\vec{u} + 3\vec{v}||^2 &= (\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u}(3\vec{v}) + (3\vec{v}) \cdot \vec{u} + (3\vec{v}) \cdot (3\vec{v}) \\ &= ||\vec{u}||^2 + 6\vec{u} \cdot \vec{v} + 9||\vec{v}||^2 \\ &= 9 - 2 + 9 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Dus $||\vec{u} + 3\vec{v}|| = 4$.