Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2003/2004 gegeven door J. Stienstra.

Lineaire Algebra (WISB121)
27 januari 2004

Opgave 1

Zij V de vectorruimte $\mathbb{R}^3$ met daarop het standaardinproduct. Gegeven is een lineaire afbeelding $T : V \to V$ die t.o.v. de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

heeft.

a) Laat zien dat T zowel een symmetrische als orthogonale afbeelding is.

b) Bereken de eigenwaarden van T met de corresponderende eigenvectoren.

c) Bepaal een orthagonale matrix U en een diagonaalmatrix D zó dat $A = U^{-1}DU$.

Opgave 2

Beschouw de vectorruimte V bestaande uit de polynomen in X met reële coëfficiënten en graad ≤ 3. Gegeven is de afbeelding $T : V \to V$ gegeven door

$$T : p(X) \mapsto p''(X) - 4Xp'(X) - 2p(X)$$

waarin het accent differentiatie naar X betekent.

a) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.

b) Bepaal de matrix van T ten opzichte van de geordende basis $1, X, X^2, X^3$.

c) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van T.

Opgave 3

Zij V de vectorruimte $\mathbb{R}^4$ met daarop het standaard inproduct. Zij $W \subset V$ de deelruimte opgespannen door de vectoren $(1, 1, -1, -1), (-1, -1, 0, 0)$ en $(-1, 1, 3, 2)$.

a) Bepaal met behulp van het Gram-Schmidt procédé een orthonormale basis van W.

b) Zij $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ een orthonormale basis van W die je in onderdeel a) gevonden hebt. Vul deze basis aan tot een orthonormale basis $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ van $\mathbb{R}^4$.

Opgave 4

Bepaal een nieuw rechthoekig coördinatenstelsel in het platte vlak zodanig dat de kegelsnede C gegeven door $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ in de nieuwe coördinaten x', y' de standaardgedaante $Ax'^2 + By'^2 = 1$ krijgt. Wat voor kegelsnede is C?