DEPARTEMENT WISKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–Eskwadraat.
HET COLLEGE WISB121 WERD IN 2006/2007 GEGEVEN DOOR JAN STIENSTRA.

Lineaire Algebra (WISB121)
7 november 2006

Opgave 1

a) Geef alle oplossingen van het volgende stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & + & 7x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & -8 \end{array}$$

b) Geef een basis voor de nulruimte (= nullspace) van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Wat is de dimensie (= dimension) van de nulruimte (= nullspace) van de matrix A?

Opgave 2

We bekijken de volgende kolomvectoren in $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Zit de vector $\mathbf{w}$ in het opspansel (= span) van de vectoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$?

b) Zijn de vectoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ lineair onafhankelijk (= linearly independent)?

Opgave 3

Laat zien dat de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ inverteerbaar (= invertible) is en bereken de inverse matrix A^{-1}.

Opgave 4

Van twee vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^{61}$ is gegeven dat hun lengte (= norm = magnitude) wordt gegeven door $\| \mathbf{u} \| = 1$, $\| \mathbf{v} \| = 2$. Verder is gegeven dat de vectoren $\mathbf{u} + 3\,\mathbf{v}$ en $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ loodrecht op elkaar staan (= are perpendicular).
Zoals gebruikelijk is $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ het standaard inprodukt(= dot product) van de vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$.

a) Laat zien dat $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2$.

b) Bereken de hoek (= angle) tussen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$.

c) Laat zien dat $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$.

Opgave 5

Bereken de determinant van de matrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

Opgave 6

Neem de twee (rij-)vektoren $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ en $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$.
Bereken het uitprodukt (= cross product) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Opgave 7

We nemen de verzameling V van alle geordende paren reële getallen; dus $V = \{(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.
Definieer voor twee elementen (a_1, a_2) en (b_1, b_2) van V het element $(a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2)$ van V door

$$(a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2) \; = \; (a_1 + b_2, a_2 + b_1)\,.$$

Definieer voor $(a_1, a_2) \in V$ en $r \in \mathbb{R}$ het element $r \star (a_1, a_2)$ van V door

$$r \star (a_1, a_2) = (r\, a_1,\, a_2)\,.$$

a) Bereken $(0, 1) \boxplus (0, 1)$ en $2 \star (0, 1)$.

b) Bereken $((0, 1) \boxplus (0, 0)) \boxplus (1, 0)$ en$(0, 1) \boxplus ((0, 0) \boxplus (1, 0))$

c) Geef drie redenen waarom de verzameling V, met de regel $\boxplus$ om elementen op te tellen en de regel $\star$ om elementen met reële getallen te vermenigvuldigen, niet een vectorruimte (vector space) is.