Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2006/2007 gegeven door Jan Stienstra.

Lineaire Algebra (WISB121)
30 januari 2007

Opgave 1

a) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

b) Bepaal alle oplossingen $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 3x_2 \\ x_2' &= 4x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

c) Welke van de in b) gevonden oplossingen voldoet aan $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Opgave 2

In deze opgave is $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3i \\ 4 & 1 & 0 \\ -3i & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Bereken de eigenwaarden van A en bepaal bij elke eigenwaarde de bijbehorende eigenvectoren.

b) Laat zien dat A een Hermitese (= Hermitian) matrix is.

c) Bepaal een diagonaalmatrix D en een unitaire (= unitary) matrix U zodat $A = UDU^{-1}$. Laat expliciet zien dat de matrix U die je geeft, unitair is.

Opgave 3

Bepaal de projectie van de vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ op het vlak in $\mathbb{R}$ dat wordt gegeven door de vergelijking $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

Opgave 4

In deze opgave werken we binnen de lineaire ruimte van alle functies op $\mathbb{R}$ met waarden in $\mathbb{R}$. Neem de functies x, e^x, $\sin x$. Zij $W = \mathrm{Span}(x, e^x, \sin x)$. Definieer de afbeelding $T : W \to \mathbb{R}^3$ door $T(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(\pi) \\ f'(0) \end{pmatrix}$; hier zijn $f(0)$ en $f(\pi)$ de waarden van de functie f in, respectievelijk, 0 en π en is $f'(0)$ de waarde van de afgeleide van f in 0.

a) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.

b) Bereken $T(f)$ als f de functie $f(x) = ax + be^x + c\sin x$ is, met a, b, $c \in \mathbb{R}$.

c) Laat zien dat $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, hier is $\mathbf{0}$ de functie die constant 0 is.

d) Laat m.b.v. de vorige onderdelen zien dat de functies x, e^x,$\sin x$ lineair onafhankelijk zijn.

e) Is de lineaire afbeelding $T : W \to \mathbb{R}^3$ inverteerbaar? Geef een duidelijke motivering voor je antwoord.

Opgave 5

We bekijken de functie die aan een tweetal vectoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ een getal $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ toevoegt via de formule

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

a) Voldoet deze functie aan alle voorwaarden voor een inproduct (= inner product) op $\mathbb{R}^2$? Geef een duidelijke motivering voor je antwoord.

b) Neem $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0\}$. Laat zien dat V een lineaire deelruimte (= subspace) is van $\mathbb{R}^2$.