Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2007/2008 gegeven door Jan Stienstra.

Lineaire Algebra (WISB121)
8 november 2007

Opgave 1

a) Geef alle oplossingen van het volgende stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ x_1 & & & - & x_3 & - & 3x_4 & = & -2 \end{array}$$

We bekijken in $\mathbb{R}^3$ de kolomvectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zij $V = \mathsf{sp}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ het opspansel (=span) van de verzameling vectoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

b) Zijn de vectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{u}$ lineair onafhankelijk (=linearly independent)? Motiveer je antwoord!

c) Geef een basis van V.

d) Wat is de dimensie (=dimension) van V ?

e) Zit de vector $\mathbf{w}$ in V? Motiveer je antwoord!

Opgave 2

Laat zien dat de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ inverteerbaar (= invertible) is en bereken de inverse matrix A^{-1}.

Opgave 3

Neem de vectoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$. Met $\| \mathbf{u} \|$ (resp. $\| \mathbf{w} \|$) geven we de lengte (= norm = magnitude) van $\mathbf{u}$ (resp. $\mathbf{w}$) aan.

a) Bereken $\| \mathbf{u} \|$ en $\| \mathbf{w} \|$.

b) Bereken de hoek (= angle) tussen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{w}$.

c) Geef een reëel getal t zo dat de vector $t\mathbf{u} + \mathbf{w}$ loodrecht (=perpendicular =orthogonal) op $\mathbf{w}$ staat.

Opgave 4

In deze opgave is $\mathbf{u}$ een vector ongelijk aan $\mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^3$ en is $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0\}$; hier is $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ het dot product van de vectoren $\mathbf{v}$ en $\mathbf{u}$.

a) Bewijs (=prove) dat V een lineaire deelruimte (=subspace) van $\mathbb{R}^3$ is.

b) Bewijs dat voor iedere vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ de vector $\mathbf{w} - \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u}$ in V ligt.

c) Laat nu gegeven zijn dat $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ een basis is van V.
Bewijs dat dan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}\}$ een basis is van $\mathbb{R}^3$.

Opgave 5

Zij P_2 de vectorruimte (=vector space) bestaande uit de veeltermen met graad ≤ 2 (=polynomials of degree at most 2).

a) Bewijs (=prove) dat de veeltermen $(x-2)^2,\ (x-1),\ 1$ lineair onafhankelijk (=linearly independent) zijn.

b) Bewijs dat de verzameling veeltermen $\Big\{(x-2)^2,\ (x-1),\ 1\Big\}$ een basis is van P_2.

c) Bereken de coordinaten van de veelterm $x^2 - 2x + 1$ ten opzicht van de geordende basis $\Big((x-2)^2,\ (x-1),\ 1\Big)$.