Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2007/2008 gegeven door Jan Stienstra.

# Hertentamen Lineaire Algebra (WISB121)
# 17 maart 2008

## Opgave 1

In deze opgave werken we met de vector $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ en de afbeelding $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $L(\mathbf{v}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$ voor elke $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$; hier is $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$ het dot product van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{v}$.

a) Laat zien dat $L$ een lineaire afbeelding is.

b) Geef de matrix van $L$ t.o.v. de standaard bases van $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

c) Bepaal de nullity (= dimensie van de kern) en de rang (= rank) van $L$, of, wat op hetzelfde neerkomt, van de in b. genoemde matrix.

d) Geef een *orthonormale basis* voor de kern (= nulruimte=kernel=null space) van $L$.

## Opgave 2

a) Bereken de determinant van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

b) Bereken de inverse matrix $A^{-1}$.

## Opgave 3

Zij $P_2$ de vectorruimte (=vector space) bestaande uit de veeltermen met graad $\leq 2$ (=polynomials of degree at most 2).

a) Bewijs (=prove) dat de veeltermen $x^2,\ (x-1)^2,\ (x-2)^2$ lineair onafhankelijk (=linearly independent) zijn.

b) Bewijs dat de verzameling veeltermen $\left\{x^2,\ (x-1)^2,\ (x-2)^2\right\}$ een basis is van $P_2$.

c) Bereken de coordinaten van de veelterm $x^2 + 2x + 5$ ten opzicht van de geordende basis $\left(x^2,\ (x-1)^2,\ (x-2)^2\right)$.

## Opgave 4

We werken met rijvectoren in $\mathbb{R}^3$. Laat $\mathbf{0} = [0,0,0]$, $\mathbf{b} = [-2,3,6]$ en $\mathbf{c} = [4,1,9]$.

a) Bereken de lengte (=norm=magnitude) van zowel $\mathbf{b}$ als $\mathbf{c}$.

b) Bereken de hoek (=angle) tussen $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$.

c) Bereken het uitproduct (=cross product) $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

d) Bereken de oppervlakte (=area) van de *driehoek* in $\mathbb{R}^3$ met hoekpunten $\mathbf{0}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

## Opgave 5

In deze opgave is $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

a) Laat zien dat de kolommen van de matrix $B$ lineair afhankelijk (=linearly dependent) zijn.

b) Laat zien dat er een eigenvector van $B$ is met eigenwaarde 0.

c) Laat zien dat de bovenstaande vector $\mathbf{v}$ een eigenvector is van $B$.
Wat is de bijbehorende eigenwaarde?

d) Bereken alle eigenwaarden van $B$ en de bijbehorende eigenvectoren.

e) Geef een diagonaalmatrix $D$ en een inverteerbare matrix $C$ zo dat $B = CDC^{-1}$.

## Opgave 6

a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$.

b) Bepaal alle oplossingen $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + 5x_2 \\ x_2' &= -3x_1 + 6x_2 \end{aligned}$$

c) Welke van de in b) gevonden oplossingen voldoet aan $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ?