Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2008-2009 gegeven door Prof. Dr. I. Moerdijk.

Tweede deeltentamen Lineaire Algebra (WISB121)
12 januari 2009

De normering van dit tentamen is als volgt: elke opgave is 18 punten en het cijfer is $1 + \frac{1}{10}$totaal.

Opgave 1.

Laat:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & a & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Bepaal de waarde of waarden van a, waarvoor de determinant van A gelijk is aan nul.

b) Is A inverteerbaar als $a = 2$? Zo nee, geef een bewijs. Zo ja, bepaal de inverse.

Opgave 2.

Laat:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Bepaal de eigenwaarden van B.

b) Bepaal bij iedere eigenwaarde de bijbehorende eigenvectoren.

Opgave 3.

Laat $n \in \mathbb{N}$ en laat V_n de vectorruimte van polynomen van graad $\leq n$ zijn. Laat $\delta : V_n \to V_n$ de lineaire afbeelding zijn, die door $\delta(p(x)) = \frac{d^2}{dx^2}p(x)$ gedefinieerd is.

a) Geef een basis van de nulruimte – of kern – van δ.

b) Bereken de rang[1] van δ.

c) Geef een basis van V_3 en geef een matrix D voor $\delta : V_3 \to V_3$ ten opzichte van jouw basis.

d) Bewijs dat $D = EE$ voor een zekere matrix E.

Opgave 4.

Laat l de lijn gegeven door de vergelijking $2x + y = 0$ in $\mathbb{R}^2$ zijn, en $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de spiegeling in l.

a) Geef een basis van $\mathbb{R}^2$ die bestaat uit eigenvectoren van σ.

b) Bepaal de matrix van σ ten opzichte van deze basis.

c) Geef een matrix van σ ten opzichte van de standaardbasis.

d) Bewijs dat er geen lineaire afbeelding $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is zodanig dat $\tau \circ \tau = \sigma$.

[1]De *rang* van een lineaire afbeelding is de dimensie van haar beeldruimte.

Opgave 5.

Laat $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte zijn.

a) De *som* $U + W$ van een willekeurig paar lineaire deelruimtes U en W van V is gedefinieerd door:

$$U + W = \{v \in V | \text{ er is een } u \in U \text{ en een } w \in W \text{ zodat } v = u + w\}$$

Bewijs dat $U + W$ ook een lineaire deelruimte van V is.

b) Het *orthogonaal complement* $U^\perp$ van een lineaire deelruimte U van V is gedefinieerd door:

$$U^\perp = \{v \in V | \text{ voor alle } u \in U \text{ geldt } \langle u, v \rangle = 0\}$$

Bewijs ook van $U^\perp$ dat het een lineaire deelruimte is.

c) Bewijs dat $U^\perp \cap W^\perp = (U + W)^\perp$ voor elk willekeurig paar lineaire deelruimtes U en W van V.