Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2008-2009 gegeven door Prof. Dr. I. Moerdijk.

Eerste deeltentamen Lineaire Algebra (WISB121)
3 november 2008

De normering van dit tentamen is als volgt: elke opgave is 18 punten waard; cijfer wordt verkregen via min($\frac{10+totaal}{10}$,10).

Opgave 1.

Ga in elk van de volgende drie gevallen (a)-(c) na of de vectoren een basis van $\mathbb{R}^3$ vormen:

a) (1,2,0),(0,2,1),(1,2,1)

b) (1,2,0),(0,2,1),(1,4,1),(1,0,0)

c) (1,2,0),(6,9,3),(1,-1,3)

d) Druk de vector (1,1,1) uit in de basis/bases die je hierboven hebt gevonden.

Opgave 2.

a) Bepaal de parametervoorstelling van de lijn l in $\mathbb{R}^2$ door de punten (2,1),(-4,3).

b) Geef een normaalvector voor deze lijn.

c) Bepaal de afstand van de lijn l tot het punt (-1,-1).

Opgave 3.

Laat V de vectorruimte zijn van functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Een functie $f \in V$ heet *even* als $f(-x) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Een functie $f \in V$ heet *oneven* als $f(-x) = -f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
Toon aan:

a) De verzameling van even functies $W_e \subset V$ is een lineaire deelruimte van V.

b) De verzameling van oneven functies $W_o \subset V$ is een lineaire deelruimte van V.

c) Elke $f \in V$ is de som van een even functie, $f_e \in W_e$, en een oneven functie, $f_o \in W_o$.
(Hint: Stel $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$ met f_e even en f_o oneven. Wat is $f(-x)$?)

Opgave 4.

Beschouw het volgende stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + bx_3 &= 1 \end{aligned}$$

Hierbij zijn a en b twee gegeven reële getallen. Bepaal voor welke waarden(n) van a en b het stelsel geen oplossing heeft, en voor welke waarde(n) de oplossing een punt, lijn of een vlak vormen.

Opgave 5.

De 3×3 matrices vormen een vectorruimte V (door scalaire vermenigvuldiging en optelling "elementsgewijs" te definiëren). Definieer de lineaire deeluimte M van V als de deelruimte gegeven door de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ met } a_{ij} = 0 \text{ voor } j \leq i.$$

a) Bepaal een basis voor M.

b) Laat zien dat als A en B twee matrices zijn in M, hun product BA dan ook in M zit.

c) Bewijs dat als A, B en C drie matrices in M zijn, hun product CBA altijd nul is.

Opgave 6.

Bonusopgave: Laat V een eindig dimensionale vectorruimte zijn en U en W twee lineaire deelruimten van V. Neem aan dat elke vector $v \in V$ te schrijven is als $v = u + w$ voor zekere $u \in U$ en $w \in W$. Bewijs dat

$$dim(V) + dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W).$$

(Hint: Je kunt gebruiken dat in een eindig-dimensionale vectorruimte elk stelsel onafhankelijke vectoren kan worden uitgebreid tot een basis.)