Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2008-2009 gegeven door Prof. Dr. I. Moerdijk.

Uitwerking[1] Eerste deeltentamen Lineaire Algebra (WISB121)
3 november 2008

1. *Ga in elk van de volgende drie gevallen (a)-(c) na of de vectoren een basis van $\mathbb{R}^3$ vormen:*

   (a) *(1,2,0),(0,2,1),(1,2,1)*

   (b) *(1,2,0),(0,2,1),(1,4,1),(1,0,0)*

   (c) *(1,2,0),(6,9,3),(1,-1,3)*

   (d) *Druk de vector (1,1,1) uit in de basis/bases die je hierboven hebt gevonden.*

   Een basis van $\mathbb{R}^3$ bestaat uit 3 lineair onafhankelijke vectoren.

   (a) De makkelijkste manier om te checken of deze 3 vectoren lineair onafhankelijk zijn is door deze determinant uit te rekenen: det $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ = -2
   Dus deze vectoren vormen een basis voor $\mathbb{R}^3$.

   (b) Vier vectoren vormen nooit een basis van $\mathbb{R}^3$.

   (c) Weer berekenen we de determinant:
   det $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 9 & - \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$
   Dus deze vectoren zijn lineair afhankelijk en vormen daarom geen basis voor $\mathbb{R}^3$.

   (d) Alleen bij deelvraag (a) was er een basis. Om de vector (1,1,1) in deze basis uit te drukken gebruiken we Gauss eliminatie:
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1\frac{1}{2} \end{array}\right)$$
   We noemen de coördinaten van $(1,1,1)^T$ ten opzichte van de basis van vraag (a) nu (a_1, a_2, a_3). Uit de Gauss eliminatie volgt:
   $$\begin{aligned} a_3 &= 1\frac{1}{2} \\ a_2 &= -\frac{1}{2} \\ a_1 + 1\frac{1}{2} = 1, \text{ dus } \quad a_1 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$
   Dus $(1,1,1)^T = -\frac{1}{2}(1,2,0)^T - \frac{1}{2}(0,2,1)^T + 1\frac{1}{2}(1,2,1)^T$.

2. (a) *Bepaal de parametervoorstelling van de lijn l in $\mathbb{R}^2$ door de punten (2,1),(-4,3).*

   (b) *Geef een normaalvector voor deze lijn.*

   (c) *Bepaal de afstand van de lijn l tot het punt (-1,-1).*

   (a) Een parametervoorstelling van een lijn door de punten **a** en **b** is $x = a + \lambda(b - a)$, met $\lambda \in \mathbb{R}$. Invullen van de gegeven punten geeft voor de lijn l dan:
   $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ met $\lambda \in \mathbb{R}$.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@a-eskwadraat.nl`

(b) Een normaalvector $\mathbf{n}$ van lijn l staat loodrecht op de richtingsvector van lijn l. Dat betekent dat het inproduct van $\mathbf{n}$ en de vector (-6,2) gelijk moet zijn aan 0. Een vector die hieraan voldoet is bijvoorbeeld (1,3), want: $-6 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 0$.

(c) De afstand van een punt $\mathbf{b} = (-1, -1)$ tot de een lijn l waarop het punt $\mathbf{a}$ ligt, wordt gegeven door

$$d(l, \mathbf{b}) = \left| \frac{< \mathbf{n}, \mathbf{a} > - < \mathbf{n}, \mathbf{b} >}{|\mathbf{n}|} \right|.$$

De lijn l heeft de vergelijking $x_1 + 3x_2 = 5$. Hieruit volgt dat $< \mathbf{n}, \mathbf{a} >= 5$. Gebruikmakend van de normaalvector, gevonden bij vraag (b), volgt dat $< \mathbf{n}, \mathbf{b} >= 1 \cdot -1 + 3 \cdot -1 = -4$ en $|\mathbf{n}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. Invullen in de formule levert $d(l, \mathbf{b}) = |\frac{5+4}{\sqrt{10}}| = \frac{9}{10}\sqrt{10}$.

3. *Laat V de vectorruimte zijn van functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Een functie $f \in V$ heet even als $f(-x) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Een functie $f \in V$ heet oneven als $f(-x) = -f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.*
Toon aan:

(a) *De verzameling van even functies $W_e \subset V$ is een lineaire deelruimte van V.*

(b) *De verzameling van oneven functies $W_o \subset V$ is een lineaire deelruimte van V.*

(c) *Elke $f \in V$ is de som van een even functie, $f_e \in W_e$, en een oneven functie, $f_o \in W_o$. (Hint: Stel $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$ met f_e even en f_o oneven. Wat is $f(-x)$?)*

(a) De verzameling van even functies $W_e \subset V$ is een lineaire deeltuimte van V, als:

i. W_e niet leeg is
ii. $f, g \in W_e \to f + g \in W_e$
iii. $f \in W_e, \lambda \in \mathbb{R}$ willekeurig $\to \lambda f \in W_e$

i. Laat $f(x) = 0$, de nulvector van V, dan geldt: $f(-x) = f(x)$, dus $f \in W_e$, dus $W_e \neq \emptyset$.
ii. Als $f, g \in W_e$, dan $f + g \in W_e$, omdat $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, dus $f + g$ is ook een even functie.
iii. Als $f \in W_e$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan $\lambda f \in W_e$, omdat $(\lambda f)(-x) = \lambda(f(-x)) = \lambda(f(x)) = (\lambda f)(x)$, dus is λf ook een even functie.

Aangezien W_e aan de drie gestelde eisen voldoet, is het inderdaad een lineaire deelruimte van V.
(Normering: 4 punten voor bewijs, 0.5 voor netjes opschrijven)

(b) De verzameling van oneven functies, $W_o \subset V$, is een lineaire deelruimte van V als:

i. W_o niet leeg is
ii. $f, g \in W_o \to f + g \in W_o$
iii. $f \in W_o, \lambda \in \mathbb{R}$ willekeurig $\to \lambda f \in W_o$

i. Laat $f(x) = 0$, de nulvector van V, dan geldt: $f(-x) = -f(x)$, dus $f \in W_o$, dus $W_o \neq \emptyset$.
ii. Als $f, g \in W_o$, dan $f + g \in W_o$, omdat $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f + g)(x)$, dus $f + g$ is ook een oneven functie.
iii. Als $f \in W_o$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan $\lambda f \in W_o$, omdat $(\lambda f)(-x) = \lambda(f(-x)) = \lambda(-f(x)) = -(\lambda f)(x)$, dus is λf ook een oneven functie.

Aangezien W_o aan de drie gestelde eisen voldoet, is het inderdaad een lineaire deelruimte van V.
(Normering: als bij (a))

(c) Begonnen moet worden met het vinden van f_e en f_o : we zoeken functies $f_e \in W_e$ en $f_o \in W_o$ zodanig dat $f_e + f_o = f$, en we willen een paar extra eigenschappen afleiden om de juiste functies te kunnen vinden. Dus stel: $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$ met f_e even, f_o oneven. Dan geldt: $f(-x) = f_e(x) - f_o(x)$. Hieruit kan een stelsel van twee lineaire vergelijkingen afgeleid worden, waarvan de oplossingen zijn:

$f_e(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$
$f_o(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$
Bewijs van (c): Stel $f_e(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, $f_o(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.
$f_e(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = f_e(x)$, dus f_e is inderdaad even.
$f_o(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -f_o(x)$.
Dus elke $f \in V$. is de som van een even en een oneven functie. (Sterker nog: deze combinatie is uniek.)

Normering: 4 punten voor $f_e(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ en $f_o(x) = \frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$; 4 punten voor bewijs f_e is even, f_o is oneven en $f_e + f_o = f$; 1 punt voor netjes opschrijven

4. *Beschouw het volgende stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + bx_3 &= 1 \end{aligned}$$

Hierbij zijn a en b twee gegeven reële getallen. Bepaal voor welke waarden(n) van a en b het stelsel geen oplossing heeft, en voor welke waarde(n) de oplossing een punt, lijn of een vlak vormt.

Gebruik, om de vraag te beantwoorden, de volgende matrix: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{array}\right)$

Gauss-eliminatie geeft dan: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 1 \end{array}\right)$

- Dit systeem heeft geen oplossing als $b = 1$, want $0 \times x_3 \neq 1$.
- Als $b \neq 1$, $a \neq 1$, dan heeft het systeem een unieke oplossing: $x_3 = \frac{1}{b-1}$, $x_2 = 0$, $x_1 = -\frac{1}{b-1}$.
- Als $b \neq 1$, $a = 1$, dan kan variabele x_2 elke waarde aannemen, dus vormen de oplossingen een lijn:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b-1} \\ 0 \\ \frac{1}{b-1} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. *De 3×3 matrices vormen een vectorruimte V (door scalaire vermenigvuldiging en optelling "elementsgewijs" te definiëren). Definieer de lineaire deeluimte M van V als de deelruimte gegeven door de matrices*
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, met $a_{ij} = 0$ voor $j \leq i$.

   (a) *Bepaal een basis voor M.*
   (b) *Laat zien dat als A en B twee matrices zijn in M, hun product BA dan ook in M zit.*
   (c) *Bewijs dat als A, B en C drie matrices in M zijn, hun product CBA altijd nul is.*

   (a) Alle matrices M zijn van de vorm $\begin{pmatrix} 0 & \bigstar & \bigstar \\ 0 & 0 & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Neem de volgende matrices: $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Dan is $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
   wat aantoont dat e_1, e_2, e_3 lineair onafhankelijk zijn en M voortbrengen, dus is e_1, e_2, e_3 een basis voor M.

(b) Gegeven basis e_1, e_2, e_3, dan geldt dat $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & af \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Als we vraag (b) twee maal toepassen volgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & g & h \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & af \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & g & h \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0.$$