Tentamen Infinitesimaalrekening A

22 december 2009, 14.00 – 17.00 uur

Uitwerkingen

N.B. Deze uitwerkingen zijn niet de enig mogelijke!

1a. Kies $x, y \in \mathbb{R}$ zodat $x < y$. Omdat f monotoon dalend is, geldt $f(x) \geq f(y)$. Maar f is injectief, dus $f(x) = f(y)$ kan niet. Conclusie: $f(x) > f(y)$. Dus f is strikt monotoon dalend.

b. f hoeft niet surjectief te zijn, zoals blijkt uit het tegenvoorbeeld f gedefinieerd door $f(x) = \frac{1}{1+x} - 1$ voor $x \geq 0$ en $f(x) = -f(-x)$ voor $x < 0$.

2. Er geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ $0 \leq x - [x] \leq 1$, en dus voor alle $x > 0$

$0 \leq \dfrac{x - [x]}{x} \leq \dfrac{1}{x}$. Omdat $\lim_{x\to\infty} 0 = 0$ en $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ concluderen we $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Omdat $g(x) = 1 - f(x)$ volgt met de verschilregel

$\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$.

3. We verdelen het interval $[2, 3]$ in twee deelintervallen $[2, 2\frac{1}{2}]$ en $[2\frac{1}{2}, 3]$. Schrijf $f(x) = \frac{1}{x}$. Omdat f monotoon dalend is, en de lengtes van de twee deelintervallen $\frac{1}{2}$ is, geldt dat de integraal $\int_2^3 f(x)dx$ kleiner of gelijk is aan de Riemannsom $\frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{2}f(2\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$ en groter of gelijk is aan de Riemannsom $\frac{1}{2}f(2\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f(3) = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$.

4. De lineaire benadering is $f(c) + (x - c)f'(c)$ met $c = \frac{\pi}{3}, f(x) = \log(\cos x)$. Nu is $f(c) = \log\frac{1}{2} = -\log 2$, $f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x}$, dus $f'(c) = -\sqrt{3}$. Dus de lineaire benadering is $-\log 2 - \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3})$.

5. De eerste primitieve zien we met de substitutiestelling in als $x \mapsto \arctan(e^x)$, controle met de kettingregel. De tweede doen we met partieel integreren, de

uitkomst is $-\frac{1}{2}(x+a)\cos(2x-a) + \frac{1}{4}\sin(2x-a)$. De controle laat opnieuw zien dat dit klopt.

6. Stel $f(x) = \arctan(x)$, dan $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, f'''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2} + \frac{-8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$. Dus geldt $f(1) = \frac{\pi}{4}, f'(1) = \frac{1}{2}, f''(1) = -\frac{1}{2}$. Het gevraagde tweede-orde Taylorpolynoom is daarom

$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2$. De gevraagde benadering is

$\arctan(1.1) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(0,1) - \frac{1}{4}(0.01) = \frac{\pi}{4} + 0,0475$.

De restterm in de formule van Taylor is $f'''(t)(x-1)^3/6$ met t tussen 1 en 1,1. Dan is $|f'''(t)| = \frac{6t^2-2}{(1+t^2)^3} \leq \frac{8}{(1+t^2)^3} \leq \frac{8}{8} = 1$ als t tussen 1 en 1,1 ligt. De fout is daarom kleiner in absolute waarde dan $\frac{1}{6}(0.1)^3 \leq (0.1)^3$.

Klopt dit? exact 47.72631099 graden = 0,832981267 rad, benadering pi/4 + 0,0475 = 0,785398163 + 0,0475 = 0,832898163, fout 0,00009, dit is zeker minder dan 0,001.

7. De oplossingen zijn $z = 1 + i$ en $z = -2 - 2i$, gecontroleerd.

8. Bijv. kunnen we deze als lineaire differentiaalvergelijking zien

$f'(x) - \frac{1+x}{x} f(x) = 0$ (het kan ook met scheiden van variabelen).

Nu is $\int \frac{1+x}{x} dx = x + \log(x)$ (want $x > 0$)

De oplossingen zijn $f(x) = ce^{x+\log x} = cxe^x$ met c een constante. Als we $f(1) = -1$ kiezen komt er $c = -\frac{1}{e}$.

Uiteraard controleren we deze oplossing door te differentiëren - er geldt $f'(x) = ce^x + cxe^x$ dus $xf'(x) = cxe^x + cx^2e^x$ en $(1+x)f(x) = cxe^x + cx^2e^x$, dus onze oplossing klopt.

9. We vinden eerst een particuliere oplossing $p(x) = ax + b$ door invullen:

er komt $a + (ax+b) = x + 2$ dus $a = 1, b = 1, p(x) = x + 1$.

Daarna lossen we de homogene vergelijking op; $\lambda^2+\lambda+1 = 0$ levert $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$, dus, zoals in het diktaat uitgelegd, $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(k_1 \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}x + k_2 \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}x$. De oplossingen van de inhomogene vergelijkijg zijn dus $f(x) + p(x)$. Invullen van $f(0) + p(0) = 1$ levert $f(0) = 0$, dus $k_1 = 0$. De gevraagde functies zijn dus $f(x) = x + 1 + k_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}$ met k_2 een vrij te kiezen constante.

10. Het handigste is om deze als product van drie limieten te schrijven, namelijk $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin x}{x^2 \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\log(1+x)}$. Zo zien we gemakkelijk dat de uitkomst is $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$. De eerste limiet door Taylorren, de tweede herkennen we als afgeleide, en de derde als 1 gedeeld door een afgeleide. Het kan ook moeilijker (met l'Hopital, de regel die ik op college altijd afgeraden heb). Je kan ook (zoals op college gedaan) Taylorpolynomen opschrijven met de restterm en dan de juiste limieten nemen.