Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB132 werd in 2010-2011 gegeven door Prof. Dr. J.P. Hogendijk.

Uitwerking[1] Infinitesimaalrekening A (WISB132) 11 november 2010

Deze uitwerkingen zijn voorlopig.

Opgave 1.

De eerste limiet bestaat wel, dit kan het gemakkelijkst aangetoond worden met de insluitstelling: $e^{-x-1} \leq e^{-x+\sin x} \leq e^{-x+1}$ en $\lim_{x\to\infty} e^{-x+1} = 0$ (want $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ en $e^{-x+1} = e \cdot e^{-x}$ en $e^{-x-1} = e^{-1} \cdot e^{-x}$ en $\lim_{x\to\infty} e^{-x-1} = 0$. Dus is $\lim_{x\to\infty} e^{-x+\sin x} = 0$.
De tweede limiet bestaat niet; als x naar oneindig gaat blijft $\sin x$ oscilleren tussen $+1$ en -1 en daarom blijft $e^{-x\sin x}$ oscilleren tussen e^{-x} en e^{+x}, verder is $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ en $\lim_{x\to\infty} e^{x} = \infty$.

Opgave 2.

Omdat $f(x) = 2\sin^2 x \cos x$ is $x \mapsto \frac{2}{3}(\sin x)^3$ een primitieve van f. Om g te primitiveren gebruiken we het beste eerst een substitutie $x+1 = y$, merk op dat $dy/dx = 1$. Een primitieve van $(y-1)\log y$ vinden we door partiële integratie als $\frac{1}{2}(y-1)^2 \log y - \frac{1}{2}\int (y - 2 + \frac{1}{y})dy$.
Al met al krijgen we als gevraagde primitieve $\frac{1}{2}x^2 \log(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 + (x+1) - \frac{1}{2}\log(x+1)$.

Opgave 3.

We nemen het Taylorpolynoom van graad 2 met restterm, voor $f(x) = \log(1+x)$, $x = \frac{1}{10}$, steunpunt 0: $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}f'''(t)$ voor een t tussen 0 en $\frac{1}{10}$.
Enig rekenwerk levert $f'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$.
Als we $y = x - \frac{x^2}{2}$ nemen voor $x = \frac{1}{10}$ krijgen we $y = \frac{1}{10} - \frac{1}{200} = 0.095$. De fout is kleiner dan $\frac{1}{3!}\frac{1}{1000}\frac{2}{(1+t)^3}$ met t tussen 0 en $\frac{1}{10}$ en dus krijgen we een fout kleiner dan $\frac{1}{3000}$, dus zeker kleiner dan $\frac{1}{2000}$. (ter informatie: $\log 1.1 = 0.095310\ldots$)

Opgave 4.

Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $z^2 - 2iz + i = 3z - 5$.
Deze vergelijking kan omgeschreven worden tot $z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$. Oplossingen via de *abc*-formule:
$z_{12} = \dfrac{1}{2}((3+2i) \pm \sqrt{(3+2i)^2 - 4(5+i)}) = \dfrac{1}{2}((3+2i) \pm \sqrt{-15+8i})$.
We berekenen eerst de wortels. Stel $(a+bi)^2 = -15+8i$. Dan $a^2 - b^2 = -15$ en $2abi = 8i$ dus $ab = 4$. Hieruit zien we $a^2 = 1$ en $b^2 = 16$ dus $a = 1$ en $b = 4$ of $a = -1$ en $b = -4$. Je mag uiteraard ook vergelijkingen in a en b verder uitwerken maar dit is genoeg omdat uit abstracte overwegingen blijkt dat er 2 verschillende wortels zijn, en die zijn dus de gevonden wortels $\pm(1+4i)$.
Dus $z_{12} = \frac{1}{2}((3+2i) \pm (1+4i))$. Dit levert $z_1 = 2+3i$ en $z_2 = 1-i$.

Opgave 5.

Bepaal $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh 3x - 3\sin x}{x \cdot (\cos x - 1)}$.
Taylorontwikkeling levert: $\sinh 3x - 3\sin x = 3x + \frac{1}{6}(3x)^3 - 3(x - \frac{1}{6}x^3) + R_3 = +5x^3 + R_3$ met $\lim_{x\to 0} R_3/x^3 = 0$ en $x(\cos x - 1) = x(-\frac{1}{2}x^2 + S_2)$ met $\lim_{x\to 0} S_2/x^2 = 0$.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@a-eskwadraat.nl`

Dus is $\frac{\sinh 3x - 3\sin x}{x\cdot(\cos x - 1)} = \frac{5+\frac{R_3}{x^3}}{-\frac{1}{2}+\frac{S_2}{x^2}}$. Hieraan zien we dat $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh 3x - 3\sin x}{x\cdot(\cos x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{5+\frac{R_3}{x^3}}{-\frac{1}{2}+\frac{S_2}{x^2}} = -10$.

Opgave 6.

Bepaal een tweemaal differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat $f''(x) - 6f'(x) + 10f(x) = 10x + 14$ en $f(0) = f'(0) = 0$. Door proberen vinden we de particuliere oplossing $p(x) = x + 2$. De algemene oplossing van de homogene vergelijking is $x \mapsto c_1 e^{3x} \cos x + c_2 e^{3x} \sin x$. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is daarom $f(x) = c_1 e^{3x} \cos x + c_2 e^{3x} \sin x + x + 2$.
Invullen van $f(0) = 0$ levert $c_1 + 2 = 0$ dus $c_1 = -2$.
$f'(x) = -6e^{3x} \cos x + (iets) \sin x + c_2 e^{3x} \cos x + 1$ dus $f'(0) = -6 + c_2 + 1$ zodat $c_2 = 5$. De oplossing is dus $f(x) = -2e^{-3x} \cos x + 5e^{-3x} \sin x + x + 2$.

Opgave 7.

Vind alle functies $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ die voldoen aan de differentiaalvergelijking $f'(x)f(x) = 2$. Oplossing door scheiden van variabelen $f(x) = \pm\sqrt{4x + c}$; omdat $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ moet je de positieve wortel nemen en moet $c \geq 0$.

Opgave 8.

Definieer $f : (1, \infty) \to (-2, \infty)$ door $f(x) = x^3 - 3x$.
Voor $x > 1$ geldt $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$ en daarom is f strikt monotoon stijgend op $(1, \infty)$. Dus is f injectief op $(1, \infty)$, en ook surjectief, dus bijectief, en daarom is f inverteerbaar. Omdat $f(2) = 8 - 6 = 2$ geldt $g(2) = 2$. Omdat $f(g(x)) = x$ geldt $f'(g(x)).g'(x) = 1$. Invullen $x = 2$ levert $f'(2)g'(2) = 1$ dus $g'(2) = 1/f'(2) = 1/9$.

Opgave 9. (bonusopgave)

Bepaal $\lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{1}{t^4 - 1} dt$.
Hiervan komt uiteraard geen uitwerking. We blijven niet aan de gang.