# Tentamen Infinitesimaalrekening A

5 november 2009, 15.30 – 18.30 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier en vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in.
- Zet op het eerste blad het nummer van je groep. Nummers van werkcollegegroepen en namen van werkcollegebegeleiders en studentassistenten:
  1 (BBL 430) Slavik Koval, Matthijs Vákár.
  2 (BBL 420) Esther Bod, Sjaak van Diepen.
  3 (BBL 426) Jantien Dopper, Thomas Visser.
  4 (BBL 505) Jan Jitse Venselaar, Bart van der Paardt.
  5 (BBL 475) Jaap Eldering, Fiona Sloothaak.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt.
- Alle opgaven tellen even zwaar. Je hoeft alleen de eerste tien opgaven te maken, deze tellen elk voor tien punten. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 10. Met de elfde opgave (bonusopgave) kun je maximaal tien punten extra verdienen, met dien verstande dat het totaalcijfer voor het tentamen nooit hoger dan 10 kan zijn.
- Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten gebruikt worden, en ook geen boeken, dictaten of eigen aantekeningen.
- Veel succes!

**Opgave 1**. Stel $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Zijn alle functies $f : A \to B$ surjectief? Zo ja, toon dit aan, zo nee geef een tegenvoorbeeld. Zijn er functies $g : A \to B$ die injectief zijn? Zo ja, geef een voorbeeld, zo nee, laat zien dat zo'n $g$ niet kan bestaan.

**Opgave 2**. Stel voor $x \neq \frac{\pi}{2}$ $\quad f(x) = \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$. Onderzoek $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$ en $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Bepaal de limieten als ze bestaan, en leg de stappen in je redenering uit. Als een of beide niet bestaan, leg uit waarom niet.

Z.O.Z.!!!!!!!!

**Opgave 3**. Bepaald de integraal $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1-\sin(x)}\,dx$.

**Opgave 4**. Bepaal de lineaire benadering van de functie $x \mapsto \arccos(x)$ in het steunpunt 0.

**Opgave 5**. Bepaal een primitieve van de functie $f(x) = (x-1)^2 e^{2x}$. Controleer je antwoord.

**Opgave 6**. Bepaal uit de tweede orde Taylorveelterm van de functie $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ in het steunpunt 1 een benadering van $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. Laat door schatting van de restterm zien dat de fout in deze benadering kleiner is dan $\frac{1}{100}$. [Let op: derdemachtswortels.]

**Opgave 7**. Bepaal alle complexe getallen $z$ die voldoen aan $z^2-(4+2i)z+(6+8i) = 0$. Schrijf de getallen in de vorm $a + bi$. Controleer de antwoorden.

**Opgave 8**. Bepaal $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x}$.

**Opgave 9**. Bepaal de oplossing $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van de differentiaalvergelijking
$f''(x) - 4f'(x) + 5f(x) = 5$ met $f(0) = 0$ en $f'(0) = 1$.

**Opgave 10**. Vind alle functies $f$ die gedefinieerd zijn op $(0,\infty)$ en die voldoen aan de differentiaalvergelijking $f'(x) = -f(x)^{\frac{4}{3}}$.

**Bonusopgave: Opgave 11**. We bekijken de complexe wortels van de vergelijking $z^5 = 1$. Hiervan is $z = 1$ een wortel, en er zijn nog vier andere wortels.

i. Geef absolute waarde en argument van deze vier wortels, en teken een plaatje. Bepaal de vierdegraads vergelijking waaraan deze vier wortels voldoen. Hint: deel $(z^5-1)$ door $z-1$.

ii. Laat zien dat de vier wortels bestaan uit twee paren complex geconjugeerden $z_1, \overline{z_1}$ en $z_2, \overline{z_2}$. Toon aan dat elk paar $z_i, \overline{z_i}$ de twee wortels zijn van een tweedegraads vergelijking $z^2 + c_i z + 1 = 0$.

iii. Bepaal nu $c_1$ en $c_2$. Je mag hierbij alleen wortelvormen gebruiken, geen sinus en cosinus. Schrijf nu de vier wortels in de vorm $a+bi$ zonder sinussen en cosinussen te gebruiken.