Tentamen Infinitesimaalrekening A

10 november 2011, uitwerkingen.

Deze uitwerkingen zijn niet de enig mogelijke!

Opgave 1. We lossen eerst de homogene vergelijking $g''(x) + 8g'(x) + 16g(x) = 0$ op: $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ heeft als enige oplossing $\lambda = -4$, en we vinden de oplossing $g(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$ met c_1 en c_2 vrij te kiezen constanten. Een particuliere oplossing $p(x)$ van de inhomogene vergelijking vinden we door proberen $p(x) = ax + b$; invullen levert $8a + 16(ax + b) = x$ voor alle x, zodat $a = \frac{1}{8}$ en $b = -\frac{1}{16}$. De gevraagde algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is dus $f(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{16} + c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$ met c_1 en c_2 vrij te kiezen constanten.

Opgave 2. f kan geprimitiveerd worden met partiële integratie: $\int x\sqrt{x+1}\,dx = x \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx = x \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}$.

g kan geprimitiveerd worden door de substitutie $x = y^2$, $y = \sqrt{x}$ als volgt: $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \int \frac{y}{1+y^2} \cdot 2y\,dy = 2\int \frac{y^2}{1+y^2}\,dy = 2\int (1 - \frac{1}{1+y^2})\,dy = 2(y - \arctan(y)) = 2\sqrt{x} - 2\arctan(\sqrt{x})$. Dit controleren we door te differentiëren: de afgeleide is $\frac{1}{\sqrt{x}}(1 - \frac{1}{1+x}) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

Opgave 3 Door Taylorpolynomen te gebruiken in het steunpunt 0 vinden we

$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + R_2$, $\log(x+1) = x + S_1$ waarbij $\lim_{x\to 0} \frac{R_2}{x^2} = 0$ en $\lim_{x\to 0} \frac{S_1}{x} = 0$. Invullen levert $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + R_2}{x^2 + xS_1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{R_2}{x^2}}{1 + \frac{S_1}{x}} = \frac{1}{2}$.

Omdat $\cosh x > \frac{1}{2}e^x$ en $0 < \log(x+1) < x$ (want $(x+1) < e^x$)

volgt voor $x > 0$ dat $\frac{\cosh x - 1}{x \log(x+1)} > \frac{e^x}{x^2}$ en omdat $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$ volgt met de duwstelling $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Opgave 4. Het derde-orde Taylorpolynoom van $\cos x$ in het steunpunt 0 is $1 - \frac{x^2}{2}$, We kiezen daarom $x = \frac{1}{10}, y = 1 - \frac{1}{200} = 0,995$. De restterm is van de vorm $\frac{1}{4!}x^4 \cos(t)$ waarbij t een getal is tussen 0 en x (de vierde afgeleide van de functie cos is weer cos). Omdat $|\cos t| \leq 1$ is de fout kleiner of gelijk aan

$\frac{1}{4!}\frac{1}{10^4} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^5}$. want $4! = 24 > 20$.

Opgave 5. We schrijven de vergelijking in de vorm $z^2 - z - 1 - 3i = 0$. Dit levert oplossingen

$z_{12} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 4(-1 - 3i)}) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5 + 12i})$.

Stel $(5 + 12i) = (p + qi)^2$ dan vinden we $pq = 6$ en $p^2 - q^2 = 5$ hetgeen algauw leidt tot $p = 3, q = 2$ en $p = -3, q = -2$ (je kunt er ook langer over doen om deze uit te rekenen maar je weet dat er twee mogelijkheden moeten zijn en dit zijn ze dus). Zo vinden we $z_{12} = \frac{1}{2}(1 \pm (3 + 2i))$ dus $z_1 = 2 + i$ en $z_2 = -1 - i$. Verstandige studenten controleren deze antwoorden.

Opgave 6. De bewering is onwaar. Tegenvoorbeeld is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = \tan x$ als $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ voor een geheel getal k; en $f(\frac{\pi}{2}+k\pi) = 0$ voor elk geheel getal k.

Opgave 7. De differentiaalvergelijking kan opgelost worden door scheiden van variabelen:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x+1}$ dus $\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{1}{2x+1}\, dx$.

Hieruit krijgen we $\log |y| = \frac{1}{2} \log |2x + 1| + c$. Merk op dat $y > 0, x > 0$ dus $2x + 1 > 0$, en daardoor krijgen we $y = k\sqrt{2x + 1}$ met $k > 0$. Invullen $f(1) = 1$ levert $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

We vinden zo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2x + 1}$. Het is een kleine moeite deze oplossing te controleren door in te vullen.

N.B. Deze differentiaalvergelijking kan ook worden behandeld als een homogene lineaire differentiaalvergelijking $f'(x) - \frac{1}{2x+1} f(x) = 0$; dit is uiteraard ook goed.

Opgave 8.

We passen breuksplitsing toe en vinden daardoor

$\frac{1}{(x-1)(x-4)} = -\frac{1}{3}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-4})$.

Hieruit krijgen we Bereken $I = -\frac{1}{3}(\int_2^3 \frac{1}{(x-1)}\, dx - \int_2^3 \frac{1}{x-4}\, dx = -\frac{1}{3}((\log 2 - \log 1) - (\log |-1| - \log |-2|) = -\frac{2}{3} \log 2$.

Bonusopgave: Opgave 9. Als dit niet gelukt is en je het toch wil weten, raad ik je aan bij helder weer een excursie naar de Euromast te organiseren met andere studenten en de docent (die best mee wil). Dan kun je kijken of je de Domtoren in de verte kunt zien.