Tentamen Infinitesimaalrekening A, Uitwerkingen

7 november 2013, 13.30 – 16.30 uur

Deze uitwerkingen zijn niet de enig mogelijke!

Opgave 1. We schrijven de vergelijking in de vorm $z^2+(-6-7i)z+22i-4=0$ en vinden met de *abc*-formule $z_{1,2}=\frac{1}{2}(6+7i\pm\sqrt{3-4i})$. Stel nu $(p+qi)^2=(3-4i)$ voor p en q reëel dan vinden we $p^2-q^2=3$ en $2pq=-4$ waaruit door proberen $p=2, q=-1$ en $p=-2, q=1$. Uit de theorie weten we dat er twee oplossingen zijn, die hebben we dus nu gevonden als $\pm(2-i)$. Conclusie: $z_{1,2}=\frac{1}{2}(6+7i\pm(2-i))$ dus de oplossingen zijn $z_1=4+3i$ en $z_2=2+4i$.

Opgave 2. De eerste limiet kan op verscheidene manieren, hier met grote O: $\sin x=x+O(x^3)(x\to 0)$ dus $\sin x^3=x^3+O(x^9)(x\to 0)$ en $\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+O(x^5)(x\to 0)$ en we vinden dan $\frac{\arctan x-x}{\sin(x^3)}=\frac{-\frac{1}{3}x^3+O(x^5)}{x^3+O(x^9)}(x\to 0)=\frac{-\frac{1}{3}+O(x^2)}{1+O(x^6)}(x\to 0)$ en hieruit volgt dat de eerste limiet $-\frac{1}{3}$ is.

Als voorbereiding voor de tweede limiet schrijven we

$\sqrt{x}-\sqrt{(x-\sqrt{x})}=\sqrt{x}-\sqrt{(x-\sqrt{x})}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{(x-\sqrt{x})}}{\sqrt{x}+\sqrt{(x-\sqrt{x})}}=\frac{x-(x-\sqrt{x})}{\sqrt{x}+\sqrt{(x-\sqrt{x})}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{(x-\sqrt{x})}}=\frac{1}{1+\sqrt{(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}}$. Omdat $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$ geldt

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ en dus is de tweede limiet gelijk aan $\frac{1}{2}$.

Opgave 3. We bepalen eerst een aantal afgeleiden van f;

$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}},\ f'(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}, f''''(x)=-\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$.

De derde-orde Taylorveelterm van $f(x)=\sqrt{1+x}$ in het steunpunt 0 is
$f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(0)x^3$, we vinden

$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$.

We vinden de benadering van $\sqrt{1,2}$ door $x=\frac{2}{10}$ in deze veelterm in te vullen:

$\sqrt{1,2}\approx 1+\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\frac{1}{2000}=1.0955$

De fout in deze benadering is $\frac{f''''(s)}{24}x^4$ voor een getal s tussen 0 en $x = \frac{2}{10}$.

Nu geldt dat voor zulke s geldt $1 + s > 1$ en daardoor $0 < (1 + s)^{-\frac{7}{2}} < 1$. Daarom is de absolute waarde van de fout kleiner dan

$\frac{1}{24}\frac{15}{16}\frac{16}{10000} = \frac{15}{24}\frac{1}{10000}$ en dit is kleiner dan $\frac{1}{10000}$.

Opgave 4 (a) We substitueren $x = y^2, y = \sqrt{x}$ en vinden $\frac{dx}{dy} = 2y$ en $\int \frac{1}{2-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2y}{2-y}\,dy$.

Nu is $2y = 2y - 4 + 4$ en dus $\int \frac{2y}{2-y}\,dy = \int(-2 + \frac{4}{2-y})\,dy = -2y - 4\ln|y-2|$. Conclusie: voor $x > 4$ $\int \frac{1}{2-\sqrt{x}}\,dx = -2\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x} - 2)$.

Controle: de afgeleide is $-\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en na onder één noemer brengen blijkt dit gelijk te zijn aan $\frac{1}{\sqrt{x}}(\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}) = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$.

(b) We schrijven eerst $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. Daarom is het een goed idee om $y = x - \frac{1}{2}$ d.w.z. $x = y + \frac{1}{2}$ te substitueren in de integraal, merk op dat $\frac{dx}{dy} = 1$, we krijgen $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy$.

Om de $\frac{3}{4}$ in de noemer weg te krijgen substitueren we $y = \frac{\sqrt{3}}{2}z$, d.w.z. $z = \frac{2}{\sqrt{3}}y$, we hebben $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en er komt $I = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\frac{3}{4}z^2+\frac{3}{4}}\,dz = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{2}{\sqrt{3}}(\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) - (\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})) = \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{6} - \frac{-\pi}{6}) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Opgave 5. Om de eerste differentiaalvergelijking op te lossen scheiden we variabelen, we krijgen (voor $y \neq 0$) op magisch niveau $\frac{1}{2y}\,dy = -\frac{1}{x}\,dx$ of beter gezegd $\frac{1}{2y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$ en hierdoor door integreren

$\frac{1}{2}\ln|y| = -\ln|x| + c$, dus $\ln|y| = -2\ln|x| + 2c$, hieruit $y = \pm e^{2c}\frac{1}{x^2}$ met c willekeurig, en daaruit $y = kx^{-2}$ voor willekeurige constante k. Controleren: als $y(x) = kx^{-2}$ dan $y'(x) = -2kx^{-3}$ dus $y'(x) + \frac{2y}{x} = -2kx^{-3} + \frac{2kx^{-2}}{x} = 0$; hieruit blijkt dat $k = 0$ ook voldoet.

We stellen nu dat $y(x) = k(x) \cdot x^{-2}$ een oplossing is van de tweede vergelijking.

Door invullen in de vergelijking krijgen we
$k'(x) \cdot x^{-2} + k(x) \cdot (-2x^{-3}) + k(x) \cdot (2x^{-3}) = 1$

en hieruit $k'(x) \cdot x^{-2} = 1$ zodat $k'(x) = x^2$. Daarom $k(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ voor een constante en $y(x) = \frac{x}{3} + cx^{-2}$. Verder moet gelden $y(1) = \frac{1}{3} + c = 0$. We concluderen $c = -\frac{1}{3}$ en $y(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}x^{-2}$.

Opgave 6. We lossen eerst op $r^2 + 2r + 5 = 0$, de wortels zijn $r = -1 \pm 2i$ en de oplossingen van de homogene vergelijking $y'' + 2y' + 5y = 0$ zijn daarom $y(x) = Ae^{-x} \cos 2x + Be^{-x} \sin 2x$ met A en B willekeurige reële constanten.

Nu vinden we een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking
$y'' + 2y' + 5y = 5 \cos x$ door te proberen $p(x) = a \cos x + b \sin x$.

Dan $p'(x) = -a \sin x + b \cos x$ en $p''(x) = -a \cos x - b \sin x$ en daarom
$p"(x) + 2p'(x) + 5p(x) = (4a + 2b) \cos x + (4b - 2a) \sin x$ voor alle x en dus moet $4b - 2a = 0$ (zodat $a = 2b$) en $4a + 2b = 5$, (zodat $5a = 5$), dus $a = 1$ en $b = \frac{1}{2}$ en $p(x) = \cos x + \frac{1}{2} \sin x$.

De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking krijgen we door optellen:

$y(x) = \cos x + \frac{1}{2} \sin x + Ae^{-x} \cos 2x + Be^{-x} \sin 2x$.

Opgave 7. De som $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(1 + \frac{2k}{n})$ kan als Riemannsom opgevat worden als we nemen $f(x) = \ln(1 + 2x)$, het integratieinterval van 0 tot 1 verdelen in n stukjes namelijk $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, en in elk interval nemen we de functiewaarde in het rechter randpunt $\frac{k}{n}$. De limiet is $\int_0^1 \ln(1 + 2x)\, dx$. Een primitieve vinden we b.v. door partiële integratie als volgt:

$\int \ln(1 + 2x)\, dx = \frac{1}{2} \int 2 \ln(1 + 2x)\, dx = \frac{1}{2}(1 + 2x) \ln(1 + 2x) - \frac{1}{2} \int \frac{1+2x}{1+2x} \cdot 2\, dx = \frac{1}{2}((1 + 2x) \ln(1 + 2x) - 2x)$. (Het kan ook anders, b.v. door eerst $y = 1 + 2x$ te substitueren.)

Hieruit vinden we de limiet als $\frac{1}{2}((3 \ln 3 - 2 - 1 \ln 1 + 0) = \frac{3}{2} \ln 3 - 1$.

Bonusopgave. Opgave 8. Hiervan geven we uiteraard geen volledige uitwerking. Er moet iets over bijven om zelf over na te denken. We merken alleen op dat $f(t) = \cosh(t)$ een inverse heeft omdat hij strikt monotoon stijgend is op $[0, \infty)$ (kunnen we aantonen door te laten zien dat de afgeleide positief is op $(0, \infty)$) en dat als $f(t) = \cosh(t) = x$, dan $e^t + e^{-t} = 2x$ en als we $e^t = z$ stellen kunnen we z oplossen. Merk op dat er nu twee oplossingen z_1 en z_2 zijn met product 1. Onze t is de logaritme van een van deze beide z, en omdat $t \geq 0$ is, is t de logaritme van de unieke wortel $z \geq 1$.