Tentamen Infinitesimaalrekening A, 8 november 2012, uitwerkingen.

Deze uitwerkingen zijn niet de enig mogelijke!

Opgave 1.
We lossen eerst de homogene vergelijking $y'' - 2y' + 2y = 0$. De bijbehorende vergelijking is $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ en vinden $\lambda_{12} = 1 \pm i$. De algemene oplossing van de homogene vergelijking is daardoor $y(x) = Ae^x \cos x + Be^x \sin x$ waarbij A en B willekeurige constanten zijn. Daarna vinden we een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking $y'' - 2y' + 2y = x$ door $y(x) = px + q$ te proberen. Door invullen vinden we voor alle x
$-2p + 2px + 2q = x$ zodat $p = q = \frac{1}{2}$. Hierdoor vinden we als algemene oplossing van de inhomogene vergelijking $y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + Ae^x \cos x + Be^x \sin x$. Door invullen van de beginvoorwaarde $y(0) = 1$ volgt $\frac{1}{2} + A = 1$ dus $A = \frac{1}{2}$. Differentieren van y en invullen van $x = 0$ levert $y'(0) = \frac{1}{2} + A + B = 0$ en daarom $B = -1$. Het antwoord is daarom $y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^x \cos x - e^x \sin x$.

Opgave 2. De eerste limiet kunnen we bv doen met de regel van l'Hôpital (het kan ook met Taylor):
$\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{(1+x^2)\sin x}$. Op deze limiet passen we opnieuw de regel van l'Hôpital toe en we vinden
$\lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{(1+x^2)\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2}{(1+x^2)\cos x + 2x \sin x} = 2.$
Bij de tweede limiet nemen we eerst de logaritme: $\lim_{x\to 0} \ln(1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\sin x)}{x}$.
Deze limiet kunnen we met de regel van l'Hôpital doen maar we kunnen hem ook herkennen als de afgeleide van $f(x) = \ln(1 - \sin x)$ in het punt 0 (omdat $f(0) = \ln(1 - \sin 0) = 0$ en daarom is hij $f'(0) = \frac{1}{1-\sin 0} \cdot (-\cos 0) = -1$.
We concluderen dat de gevraagde limiet gelijk is aan e^{-1} omdat namelijk
$\lim_{x\to 0}(1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to 0} \ln(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}}$, want de functie e^x is continu.

Opgave 3. De tweede-orde Taylorveelterm van $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in het steunpunt 1 is $f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$. Omdat $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ vinden we
$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ en $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ en daarom
$f'(1) = \frac{1}{3}$ en $f''(1) = -\frac{2}{9}$. De gevraagde Taylorveelterm wordt $1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2$.
We vinden hiermee de benaderingen door invullen van $x - 1 = -\frac{3}{10}$ en $x - 1 = \frac{3}{10}$ en daardoor $\sqrt[3]{0,7} \approx 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = 0,89$ en $\sqrt[3]{1,3} \approx 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = 1,09$.
De fout in de benadering van $\sqrt[3]{1,3} \approx 1,09$ is $\frac{1}{6}f'''(t)(x-1)^3$ waarbij $x = 1,3$ dus $x - 1 = \frac{3}{10}$. en t een getal is tussen 1 en 1,3. Verder is $f'''(t) = \frac{10}{27}t^{-\frac{8}{3}}$.
Omdat $t > 1$ geldt $t^{-\frac{8}{3}} < 1$ en dus $|f'''(t)| < \frac{10}{27}$. Daarom is de absolute waarde van de fout kleiner dan $\frac{1}{6} \cdot \frac{10}{27} \cdot \frac{27}{1000} = \frac{1}{600}$.
Opmerking: volgens de rekenmachine is $\sqrt[3]{1,3} = 1,091392883\ldots$ en $\sqrt[3]{0,7} = 0,887904\ldots$

Opgave 4. De gevraagde getallen z voldoen aan $z^2 + (3i - 3)z - 5i = 0$ en we vinden met de $abc-$ formule

$z_{12} = \frac{-3i+3\pm\sqrt{(3i-3)^2+20i}}{2}$.
Nu is $(3i-3)^2 + 20i = -18i + 20i = 2i$. Gevraagd dus getallen $x + yi$ zodat $(x+yi)^2 = 2i$, we vinden $x^2 - y^2 = 0$ dus $x = \pm y$ en $xy = 1$ dus deze twee getallen zijn $1 + i$ en $-1 - i$.
De conclusie is $z_1 = \frac{-3i+3+1+i}{2} = 2 - i$ en $z_2 = \frac{-3i+3-1-i}{2} = 1 - 2i$.
Controle: $(2-i)^2 + 3i(2-i) = 4 - 4i - 1 + 6i + 3 = 6 + 2i$ en $3(2-i) + 5i = 6 + 2i$, dit klopt;
verder $(1-2i)^2 + 3i(1-2i) = 1 - 4i - 4 + 3i + 6 = 3 - i$ en $3(1-2i) + 5i = 3 - i$, dit klopt ook.

Opgave 5 (a) Omdat $x > 0$ kunnen we stellen $x = y^2$, $y = \sqrt{x}$ en we vinden $\displaystyle\int f(x) = e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^y \cdot 2y\,dy$. Deze kunnen we oplossen met partiële integratie, we vinden bijvoorbeeld
$\int e^y \cdot 2y\,dy = e^y \cdot 2y - \int e^y \cdot 2dy = 2ye^y - 2e^y$.
Dus is een gevraagde primitieve $e^{\sqrt{x}} \cdot (2\sqrt{x} - 2)$.
(b) Er geldt $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ en we gaan eerst breuksplitsen en stellen $\frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$. Hierdoor vinden we $a(x+1) + b(x-2) = 3x$ zodat $a + b = 3$ en $a - 2b = 0$. Hieruit volgt $3b = 3$ dus $b = 1$ en $a = 2$.
Daarom is $\int_0^1 \frac{3x}{x^2-x-2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x-2} + \int_0^1 \frac{1}{x+1} = 2(\ln|-1| - \ln|-2|) + (\ln 2 - \ln 1) = -\ln 2$.

Opgave 6. De oplossingen van $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$ op $(0, \infty)$ kunnen we schrijven als $y(x) = Ke^{-\int \frac{-1}{x}\,dx}$ waarbij $\int \frac{-1}{x}\,dx$ een geschikte primitieve is, die we zo mooi mogelijk kiezen (dus $-\ln x$),
we krijgen $y = Ke^{\ln x} = Kx$, waarin K een willekeurige constante is. Dit kan gemakkelijk gecontroleerd worden door invullen.
Om de oplossingen van $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 3$ te bepalen werken we met variatie van constanten (tenzij we een brainwave krijgen, hetgeen niet het geval is). Stel $y(x) = K(x)x$ is een oplossing van de vergelijking, dan $K'(x)x + K(x) - K(x) = 3$ dus we krijgen $K'(x) = \frac{3}{x}$ dus $K(x) = 3\ln x + c$ (we werken met $x > 0$). Conclusie: de algemene oplossing van $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 3$ is $y(x) = 3x\ln x + cx$. Hierin is c een willekeurige constante. Ook dit kan gemakkelijk gecontroleerd worden door invullen.

Opgave 7. Voor alle x geldt $f'(x) = 7x^6 + 7 > 0$ dus f is strikt monotoon stijgend en daarom $1 - 1$. Duidelijk is dat $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ en $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ en dus is het bereik van de functie alle reële getallen (de functie is namelijk continu). De functie heeft daarom een inverse functie g met domein de reële getallen.
Er geldt $f(g(x)) = x$ en daarom $f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$.
We bepalen nu eerst $g(8)$: stel $g(8) = w$ dan moet $f(w) = 8$ dus $w^7 + 7w = 8$ en daarom $w = 1$. We hebben $f'(1) = 7 + 7 = 14$. Hieruit vinden we $g'(8) = \frac{1}{14}$. Een lineaire benadering van g in het steunpunt 8 is
$g(8) + g'(8) \cdot (x - 8) = 1 + \frac{1}{14}(x - 8)$.
(Opmerking: voor g zelf kunnen we geen formule vinden)

Bonusopgave: Opgave 8.

Hiervan geven we uiteraard geen uitwerking. Het getal c heet de constante van Euler. Van c (meestal γ genoemd in de literatuur) zijn al heel wat decimalen berekend maar er is nog steeds niet bekend of deze constante van Euler een rationaal of irrationaal getal is.