Tentamen Infinitesimaalrekening A

3 januari 2014, 9.00 – 12.00 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier en vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in. Schrijf op het eerste blad je emailadres als je de uitslag per email wilt ontvangen
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt.
- Je hoeft alleen de eerste zeven opgaven te maken, deze tellen elk voor tien punten, behalve opgave 4, die voor 15 punten telt. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 7,5. Met de achtste opgave (bonusopgave) kun je maximaal tien punten extra verdienen, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger dan 10 kan zijn.
- Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten of andere electronica gebruikt worden, en ook geen boeken, dictaten of eigen aantekeningen.
- Veel succes!

Opgave 1. Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $\dfrac{z(z+1)}{(z+2)(z+3)} = i$.

Schrijf de getallen in de vorm $a + bi$ waarbij a en b reëele getallen zijn.

Opgave 2. Stel voor $x > 0 \quad f(x) = \dfrac{x - \sin x}{x - \arctan x}$

Bepaal $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Bestaat $\lim_{x\to\infty} f(x)$? Als deze limiet bestaat, geef precies aan waarom, en bepaal hem. Als de limiet niet bestaat, leg uit waarom niet.

Opgave 3. Bepaal alle differentieerbare functies $y(x)$, die gedefinieerd zijn op het domein $(0, \infty)$, en waarvoor geldt $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3y}{x} = x^2$. Controleer je antwoord door differentiëren.

Z.O.Z!!!!!

Opgave 4 (15 punten) Primitiveer de drie volgende functies:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}, \quad g(x) = x^2\cos(\pi x), \qquad \text{en} \qquad h(x) = \frac{x+2}{x^2+x}$$

Opgave 5. Stel $f(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$. (log is de natuurlijke logaritme)

(a). Bepaal de vierde-orde Taylorveelterm van f in het steunpunt 0 en bereken hiermee een benadering van $f(\frac{1}{5})$.

(b). Laat zien dat de absolute waarde van de fout in deze benadering kleiner is dan $\frac{1}{2500}$.

(c). Laat zien dat $f(\frac{1}{5}) = \log\frac{3}{2}$. (Merk op: we hebben in (a) dus een goede benadering van $\log\frac{3}{2}$ gevonden.)

Opgave 6. Bepaal een reële tweemaal differentieerbare functie f die voldoet aan de differentiaalvergelijking:

$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = \cos x - \sin x$ voor alle x,

en waarvoor geldt $f(0) = 0, f'(0) = 3$.

Opgave 7. We bekijken de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$ op de reële getallen.

Laat zien dat deze functie f een inverse functie g heeft met domein de reële getallen.

Bereken de lineaire benadering van g in het steunpunt 4.

Bonusopgave: Opgave 8. Bereken $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$