Tentamen Infinitesimaalrekening A

3 november 2015, Uitwerkingen.

Opgave 1. We lossen eerst de homogene vergelijking op: stel $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, dit levert $\lambda = +2$ and $\lambda = -1$ en als algemene oplossing van de homogene vergelijking $y'' - y' - 2y = 0$ $y = Ae^{2x} + Be^{-x}$ voor willekeurige constanten A en B. Om een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking te vinden stellen we $y = ax^2 + bx + c$ en vullen in; we vinden hierdoor $y' = 2ax + b$ en $y'' = 2a$ en $-2ax^2 + x(-2a - 2b) + (2a - b - 2c) = 2x^2 - 3$ en dus $a = -1, b = 1, c = 0$. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is dus $y = Ae^{2x} + Be^{-x} - x^2 + x$.

Hieruit volgt $y' = 2Ae^{2x} - Be^{-x} - 2x + 1$ en door invullen $y(0) = 1, y'(0) = 0$ vinden we $A + B = 1$, $2A - B + 1 = 0$ dus $A = 0, B = 1$ en dus is de oplossing van ons probleem

$y(x) = e^{-x} - x^2 + x$.

Opgave 2. We ontwikkelen in Taylorpolynomen met restterm voor $x \to 0$ en krijgen $\sqrt{1+4x} = 1 + \frac{1}{2}(4x) - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4}(4x)^2 + O(x^3)$ en $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + O(x^4)$ en door dit in te vullen krijgen we voor $x \to 0$: $\dfrac{\sqrt{1+4x} - 1 - 2x}{1 - \cos x} = \dfrac{-2x^2 + O(x^3)}{\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)} = \dfrac{-2 + O(x)}{\frac{1}{2} + O(x^2)}$, en hieruit $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1 - 2x}{1 - \cos x} = -4$.

(b) De limiet $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}(\sin(\frac{1}{x}) + \cos(x))$ bestaat, en dit zien we met de knijpstelling:

voor elke $x > 0$ geldt $-2 \leq \sin(\frac{1}{x}) + \cos(x) \leq 2$ dus $\frac{-2}{x} \leq \frac{1}{x}(\sin(\frac{1}{x}) + \cos(x)) \leq \frac{2}{x}$. Omdat geldt $\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{x} = 0$ en $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$ volgt $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}(\sin(\frac{1}{x}) + \cos(x)) = 0$.

Opgave 3. (a) De vierde-orde Taylorveelterm van $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ in het steunpunt 0 is $x + \frac{x^3}{6}$ en hiermee vinden we de benadering $\sinh(1) = 1\frac{1}{6}$.

(b) De fout in deze benadering is $f^{(v)}(s) \cdot \frac{x^5}{5!}$ waarbij$f^{(v)}$ de vijfde afgeleide is van $f(x) = \sinh(x)$ en $x = 1$ en s een getal is tussen 0 en 1. We vinden $0 < f^{(v)}(s) = \cosh(s) = \frac{1}{2}(e^s + e^{-s}) < \frac{1}{2}(3\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$ (want $\cosh(x)$ is stijgend voor $x > 0$ en daarom $\cosh(e) < \cosh(3)$) en daardoor is de fout in absolute waarde kleiner dan $\frac{5}{360} = \frac{1}{72} < \frac{1}{50}$.

Opmerking: $\sinh(1) = 1.175201\ldots$ en $\sinh(1) - 1\frac{1}{6} = 0.00853\ldots$

Z.O.Z!!!!!

Opgave 4 (a) $\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int_{-1}^{3} \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{1}{y^2+4}\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4z^2+4}\,2dz = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2}(\arctan(1) - \arctan(-1)) = \frac{1}{4}\pi.$

(b) (7 punten Bijvoorbeeld: we integreren partieel

$\int \arcsin(2x)\,dx = x \arcsin 2x - \int x \cdot \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = x \arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}.$

Opgave 5.

We lossen eerst de homogene vergelijking op: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} = 0$. We vinden de oplossing $y = 0$ en verder voor $y \neq 0$ $\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x^2}\,dx$ en dit leidt tot $\log|y| = \frac{1}{x} + C$, en daardoor vinden we $|y| = Ce^{\frac{1}{x}}$ met $C > 0$ en uiteindelijk $y = Ke^{\frac{1}{x}}$ met K een willekeurige constante.

In dit geval is het gemakkelijk één oplossing van de inhomogene vergelijking te raden, namelijk $y(x) = -\frac{1}{2}$.

We vinden zo als algemene oplossing van de inhomogene vergelijking

$y(x) = -\frac{1}{2} + Ke^{\frac{1}{x}}$ met K een willekeurige constante.

Opgave 6. We schrijven de vergelijking $(z-3)^2 = i(z+i)$ in de standaardvorm als $z^2 - (6+i)z + 10 = 0$ en vinden daaruit

$z_{12} = \frac{1}{2}(6 + i \pm \sqrt{-5+12i}) = \frac{1}{2}(6 + i \pm (2+3i)).$

Dit levert $z_1 = 4 + 2i$ en $z_2 = 2 - i$.

Opgave 7. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin \frac{k\pi}{2n}$ kunnen we opvatten als Riemannsom voor het integratieinterval $[0, 1]$ met $f(x) = \sin \frac{x\pi}{2}$, zodat dan $f(\frac{k}{n}) = \sin \frac{k\pi}{2n}$.

De limiet is daarom $\int_0^1 \sin \frac{x\pi}{2}\,dx = -\frac{2}{\pi}(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{2}{\pi}$.

Bonusopgave. Opgave 8.

Hiervan geven we uiteraard geen oplossing. Er moet iets overblijven om zelf over na te denken.