Tentamen Infinitesimaalrekening A

8 november 2016, beknopte uitwerkingen.

Deze uitwerkingen zijn niet de enig mogelijke!

Opgave 1. We schrijven eerst $(z+1)^2 = i(3z-7)$ in de standaardvorm $z^2+(2-3i)z+(1+7i) = 0$. De abc-formule levert $z_{12} = \frac{1}{2}(-2+3i \pm \sqrt{(2-3i)^2-4(1+7i)}) = \frac{1}{2}(-2+3i \pm \sqrt{-9-40i})$. Stel $(-9-40i) = (a+bi)^2$ voor reële a en b, we vinden dan $a^2-b^2 = -9$ en $ab = -20$ en hieruit $a = 4, b = -5$ of $a = -4, b = 5$, Conclusie $z_{12} = \frac{1}{2}(-2+3i \pm (4-5i)$ en dus $z_1 = 1-i$ en $z_2 = -3+4i$.

Opgave 2. De vergelijking $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$ heeft oplossingen $\lambda_1 = 3+2i$ en $\lambda_2 = 3-2i$ en dus vinden we voor de oplossingen van de homogene vergelijking $y'' - 6y' + 13y = 0$ de functies $y(x) = Ae^{3x}\cos 2x + Be^{3x}\sin 2x$ met A en B willekeurige constanten. Een particuliere oplossing voor de inhomogene vergelijking vinden we door $y(x) = a\cos x + b\sin x$ te stellen en in te vullen in de vergelijking $y'' - 6y' + 13y = 30\sin x$, dan blijkt na enig rekenen $a = 1$ en $b = 2$. De algemene oplossingvan de inhomogene vergelijking $y'' - 6y' + 13y = 30\sin x$ is daarom $y(x) = Ae^{3x}\cos 2x + Be^{3x}\sin 2x + \cos x + 2\sin x$.

Door invullen $y(0) = 0$ vinden we $A + 1 = 0$ dus $A = -1$.

Nu $y'(x) = -3e^{3x}\cos 2x + 2e^{3x}\sin 2x + 3Be^{3x}\sin 2x + 2Be^{3x}\cos 2x - \sin x + 2\cos x$.

Invullen $y'(0) = 0$ levert $-3 + 2B + 2 = 0$ dus $B = \frac{1}{2}$. De gevraagde functie is daarom

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - e^{3x}\cos 2x + 2\sin x + \cos x.$$

Opgave 3. (a) kan met l'Hopital en met Taylorontwikkelingen, we doen het laatste: als $x \to 0$ dan vinden we met enig rekenen

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x\sin x} = \frac{\frac{1}{3}x^2 + O(x^4)}{x^2 + O(x^4)} = \frac{\frac{1}{3} + O(x^2)}{1 + O(x^2)},$$ dus de gevraagde limiet is $\frac{1}{3}$.

(b) We stellen eerst $x = \frac{1}{y}$, en zien daardoor dat de gevraagde limiet geschreven kan worden als $\lim_{y\to 0+}(1+\sin y)^{\frac{1}{y}}$.

Nu bekijken we eerst de logaritme van deze uitdrukking: $\dfrac{\log(1+\sin y)}{y}$.

Omdat teller en noemer naar 0 gaan als $y \to 0+$ kunnen we deze met l'Hopital aanpakken, de limiet is dezelfde als

$\lim_{y\to 0+} \frac{1}{1+\sin y} \cdot (\cos y) = 1.$

Conclusie: de bestudeerde limiet $\lim_{x\to\infty}(1 + \sin \frac{1}{x})^x$ bestaat en is e.

Opgave 4 (a) Met breuksplitsing vinden we $\frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{2-x}+\frac{1}{4}\frac{1}{2+x}$ en hieruit $\int \frac{1}{4-x^2}\,dx = \frac{1}{4}(\log(2-x)+\log(2+x))$ voor x in het interval $(-2, 2)$. Invullen van grenzen levert $\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-x^2}\,dx = \frac{1}{4}(2\log 3) = \frac{\log 3}{2}$.

(b) Door subtitutie $x = u^2$ vinden we $\int \arctan(\sqrt{x})\,dx = \int \arctan(u)\,2u\,du$ en hieruit door partiële integratie

$\int \arctan(u)\,2udu = u^2 \arctan u - \int \frac{u^2}{1+u^2}\,du$. Deze laatste integraal bewerken we verder:

$$\int \frac{u^2}{1+u^2}\,du = \int (1 - \frac{1}{1+u^2})\,du = u - \arctan u + C$$

We concluderen uit dit alles dat $\int \arctan(\sqrt{x})\,dx = x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan x + C = (x+1)\arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C$

Opgave 5. (a) De afgeleiden van f zijn $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} - \frac{2}{(1-x)^3}$. De derde-orde Taylorveelterm van $f(x) = \log(1+x) + \log(1-x)$ in het steunpunt 0 vinden we (door berekening van $f(0) = f(0) = 0', f'(0) = -2, f'''(0) = 0$ als $-x^2$ en hieruit de benadering $f(\frac{1}{10}) = -0,01$.

(b) Er geldt $f''''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} - \frac{6}{(1-x)^4}$. De fout in de benadering hierboven is $f'''(s)x^4/4!$ waarbij s een onbekend getal is tussen 0 en $x = \frac{1}{10}$.

Dan is dus $|f''''(s)| = \frac{6}{(1+s)^4} + \frac{6}{(1-s)^4} < 6 + 6(\frac{10}{9})^4 < 6 + 12 = 18.$

Daardoor is de fout in absolute waarde kleiner dan $\frac{18}{24} \cdot \frac{1}{10.000}$.

(c) $f(\frac{1}{10}) = \log(1,1) + \log(0,9) = \log(0,99)$, De benadering die we hierboven gevonden hadden was -0,01. Omdat de fout kleiner is dan $\frac{1}{10000}$ is de benadering in drie decimalen -0,010.

Opgave 6. De vergelijking is separabel en we vinden door scheiden van variabelen

$-\int \frac{dy}{y^2} = \int x^2\, dx$ en dus $\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^3 + C$ dus

$$y = \frac{1}{\frac{1}{3}x^3 + C}.$$

Omdat de functies gedefinieerd moeten zijn op het hele domein $(0, \infty)$ moet de noemer altijd ongelijk aan 0 zijn voor $x > 0$ en dus moet gelden $C \geq 0$.

Bij het scheiden van variabelen hebben we door y gedeeld en daarom moeten we $y = 0$ apart beschouwen: dit blijkt ook een oplossing te zijn.

Opgave 7. (a) Voor $x > 0$ geldt $f'(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$, en dus is f strikt monotoon stijgend op het domein. f is dus 1-1 en heeft dus een inverse. Duidelijk is $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ en $f(0) = 1$, en tenslotte is f continu. Daarom is het bereik van f het interval $(1, \infty)$, en dit is ook het domein van g.

(b) We merken op $f(\log a) = b$ en verder is $g(f(x)) = x$ dus $g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$, daardoor is $g'(f(\log a)) \cdot f'(\log a) = 1$ dus $g'(b) = \frac{1}{f'(\log a)} = \frac{1}{\frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})}$.

(c) Als x in het domein van g zit bestaat er een $a > 0$ met $x = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$. (Je kan dit laten zien door de kwadratische vergelijking $x = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ in a op te lossen.)

Daarna gaat het het eenvoudigst zo: als $x = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ dan is
$(\frac{1}{2}(a - \frac{1}{a}))^2 = (\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}))^2 - 1 = x^2 - 1$ en hieruit zien we $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Er zijn allerlei andere manieren om (b) en (c) op te lossen; je kunt zelfs de inverse expliciet uitrekenen, al is dit wel een heel gereken. Wie zo (c) correct vindt krijgt de volle mep punten voor (b) en (c) samen.

Bonusopgave. Opgave 8. Hiervan geven we uiteraard geen uitwerking. Er moet iets over blijven om zelf over na te denken. Het antwoord is bij benadering 88 km.