Infi A tentamen 8 nov 2018
13:30 – 16:30

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Totaal 42 punten.

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd met voldoende toelichting, eventueel enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige tekstuitleg maar zeker niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 3pt genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks; of: toelichting bij formules ontbreekt volledig (en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk).

NB: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. Bereken modulus en argument van $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^5$. 2 pt.

Oplossing: We noemen $\frac{3}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}} = z$ en vinden allereerst de modulus

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{3}{2}} = \sqrt{6},$$

zodat $z = \sqrt{6}(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{i})$ waaraan we (met elementaire kennis van de eenheidscirkel) direct aflezen dat

$$\arg z = \frac{\pi}{6}.$$

Bij complex vermenigvuldigen worden de moduli vermenigvuldigd en de argumenten opgeteld, zodat we voor z^5 krijgen:

$$\begin{aligned} |z^5| = |z|^5 &= 6^{5/2} \text{ of eventueel } 36\sqrt{6}, \\ \arg(z^5) = 5 \arg z &= \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

2. Benader $\arcsin \frac{1}{3}$ met behulp van de derde-orde Taylorveelterm van $\arcsin x$ met steunpunt 0. Leid de veelterm zelf af met de algemene Taylorformule. 4 pt.

Oplossing: De algemene Taylorformule van een functie f met orde n en steunpunt a luidt

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

We nemen $a = 0$, $n = 3$ en $f(x) = \arcsin(x)$. We krijgen achtereenvolgens:

- $f(0) = \arcsin 0 = 0$;
- $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dus $f'(0) = 1$;
- $f''(0) = x(1-x^2)^{-3/2}$ dus $f''(0) = 0$;
- $f'''(0) = (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2}$ dus $f'''(0) = 1$.

(Zelfcheck: dat de even afgeleides 0 zijn is in overeenstemming met het feit dat arcsin een oneven functie is.) Deze resultaten ingevuld in de Taylorformule geeft:

$$T_3(x) = x + \tfrac{1}{6}x^3.$$

Om $\arcsin \frac{1}{3}$ te benaderen nemen we tenslotte nog $x = \frac{1}{3}$ en dan vinden we als benadering

$$\arcsin \tfrac{1}{3} \approx \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}\tfrac{1}{27} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3 \cdot 54} = \tfrac{55}{162}.$$

3. We bekijken de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met 4 pt.

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^3) & \text{als } x \neq 0, \\ 1 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

Bepaal alle $a \in \mathbb{Z}$ waarvoor f continu is.

Oplossing: Het enige punt waar f eventueel *niet* continu zou zijn, is in $x = 0$. Dat zou je eigenlijk moeten vermelden maar als je dat overslaat hoeft het geen punten te kosten.

We merken op dat f per definitie continu is in 0 indien

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

In de opgave betekent dit dat we alle $a \in \mathbb{Z}$ moeten vinden waarvoor geldt dat

$$\lim_{x \to 0} x^a \sin(x^3) = 1.$$

We herinneren ons iets met een standaardlimiet:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

We schrijven daarom $t = x^3$ zodat

$$x^a \sin(x^3) = \frac{\sin t}{t^{-a/3}}.$$

Voor $a = -3$ zien we nu

$$\lim_{x \to 0} x^a \sin(x^3) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

maar als $a \neq -3$ hebben we

$$\lim_{x \to 0} x^a \sin(x^3) = \lim_{t \to 0} t^{\frac{a}{3}+1} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \to 0} t^{\frac{a}{3}+1}.$$

Deze laatste limiet is 0 als $a > -3$, en ∞ als $a < -3$. Dus alleen bij $a = -3$ is f continu.

Opmerking 1: je kunt dit ook oplossen met een Taylorbenadering van $\sin x^3$.

Opmerking 2: als $x < 0$ en $a \notin \mathbb{Z}$, is x^a niet altijd goed gedefinieerd, vandaar de beperking tot $a \in \mathbb{Z}$.

4. a. Gebruik de limietdefinitie van differentiëren om $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ te bepalen. 2 pt.

Oplossing: We herinneren ons de definitie:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a),$$

mits die limiet bestaat. Dit kunnen we hier toepassen met $a = 0$, $f(x) = f'(x) = \mathrm{e}^x$, $f'(a) = \mathrm{e}^0 = 1$ en de triviale verandering van notatie met x in plaats van h:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Gelukkig weten veel studenten de limietdefinitie wel op te hoesten, maar helaas wordt die dan vaak zonder nadenken toegepast op de functie $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$. *Verbijsterend!*

b. Onderzoek $\lim_{x \to 0+} (\mathrm{e}^x - 1) \log x$. 2 pt.
Hint: gebruik opgave a.

Oplossing: Met creatief nietsdoen schrijven we

$$(\mathrm{e}^x - 1) \log x = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}(x \log x).$$

We hebben hierboven gezien dat

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x} = 1;$$

verder kennen we uit paragraaf 3.4 de standaardlimiet

$$\lim_{x \to 0+} x \log x = 0;$$

aangezien beide limieten bestaan, is de limiet van het product gelijk aan het product van de limieten, dus we concluderen

$$\lim_{x \to 0} (\mathrm{e}^x - 1) \log x = 1 \cdot 0 = 0.$$

5. Differentieer $\log(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ en vereenvoudig het antwoord zo ver mogelijk. 2 pt.

Oplossing: We passen de standaardafgeleide van log toe alsmede tweemaal de kettingregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(\sqrt{x^2+1}+x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right).$$

We brengen de breuken tussen haakjes op één noemer en krijgen

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Leermomentje voor iedereen die als een haas begint de haakjes uit te werken: dat levert een hoop ellende op, terwijl het hier om een 2-puntenvraag gaat. Zie het 6e gebod!

6. Primitiveer $\dfrac{x+9}{\sqrt{x^2+9}}$. 4 pt.

Oplossing: We splitsen de integrand op in twee delen, die we apart primitiveren. Het ene deel is

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+9}} = \sqrt{x^2+9}+c.$$

Het andere deel is

$$\int\frac{9\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+9}} = \int\frac{3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(\frac{x}{3})^2+1}}.$$

Nu substitueren we eventueel $u=\frac{x}{3}$, $\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\mathrm{d}x$ en krijgen

$$9\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}} = 9\log(\sqrt{u^2+1}+u)+c,$$

waarbij we dankbaar gebruik maken van de vorige opgave! Conclusie, na terugsubstitueren:

$$\int\frac{x+9}{\sqrt{x^2+9}}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+9}+9\log\left(\sqrt{(\tfrac{x}{3})^2+1}+\tfrac{x}{3}\right)+c.$$

7. Bereken $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$. 4 pt.

Oplossing: Allereerst passen we een verdubbelingsformule toe:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$

waarmee we de integraal herschrijven als

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x;$$

hierbij hebben we in de laatste stap gebruikt dat $|\sin x|$ een even functie is. Aangezien $-\cos x$ een primitieve is van $\sin x$, vinden we

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{2}(\cos\pi - \cos 0) = 4\sqrt{2}.$$

*Veel te veel studenten denken dat $\sqrt{\sin^2 x} = \sin x$. Slechte beheersing van basisvaardigheden! Bovendien leidt het tot het antwoord 0, waarvan je weet dat het niet **kan** kloppen: de worteluitdrukking is positief behalve in $x = 0$, dus de integraal moet zeker positief zijn.*

8. a. Laat zien dat deze dubbel-oneigenlijke integraal convergent is: 4 pt.

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\log x\,\mathrm{d}x$$

Oplossing: ***Note for grading:*** *this is the most difficult problem of the exam and somewhat underrated at 4pt (which is good because a student who fails here doesn't loose much). Suggestion: award 3pt for a (mostly) correct demonstration of one-sided convergence, and award the 4th point too if the other side is also attempted with at least partial success.*

Er is inderdaad "oneigenlijkheid" als $x \to 0$ en als $x \to \infty$. We splitsen het integratie-interval daarom in een tussenpunt bijv. $x = 1$; merk op dat $\mathrm{e}^{-x}\log x$ inderdaad goed gedefinieerd is op $(0,1]$ en op $[1,\infty)$ (bij beide intervallen maakt het niet uit of je 1 er wel of niet in doet). We bekijken beide intervallen afzonderlijk.

Op $(0,1]$ geldt dat $0 < \mathrm{e}^{-x} < 1$ en dus ook $0 \le -\mathrm{e}^{-x}\log x < -\log x$ (let op het teken van log op dit interval!). Maar

$$\int_R^1 -\log x\,\mathrm{d}x = x - x\log x\Big|_{x=R}^{x=1} = 1 \text{ als } R \to 0;$$

dit is dus een convergente integraal en volgens een stelling in het boek weten we nu dat ook $\mathrm{e}^{-x}\log x$ op $(0,1]$ convergent is.

Convergentie op $[1, \infty)$ is iets lastiger aan te tonen. We kunnen gebruiken dat $\log x \leq x - 1$ (nagaan: voor $x = 1$ is er gelijkheid, en de functie $x - 1 - \log x$ heeft afgeleide $1 - \frac{1}{x}$, er is dus een extreme waarde in $x = 1$, en beschouwing van het tekenverloop van de afgeleide en/of het algemene verloop van de grafieken maakt duidelijk dat dit een minimum is; maar je kunt ook volstaan met te verwijzen naar een stelling in het boek (par.3.4)). We kunnen dus afschatten met $\mathrm{e}^{-x} \log x \leq \mathrm{e}^{-x}(x - 1)$; bovendien vinden we met een partiele integratie dat

$$\int_1^\infty (x-1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (1-x)\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^\infty + \int_1^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1}.$$

Dus ook dit is een convergente integraal, en net als hierboven concluderen we dat $\mathrm{e}^{-x} \log x$ ook op $[1, \infty)$ convergent is. *Het tweede deel kan misschien nog wat efficienter op een andere manier.*

b. Toon aan: 4 pt.

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \log x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \log(\log \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x,$$

waarbij je mag aannemen dat beide integralen convergent zijn.

Oplossing: Substitueer $u = \mathrm{e}^{-x}$, oftewel $x = -\log u = \log \frac{1}{u}$, met daarbij $\mathrm{d}u = -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Hierbij krijgen we ook nieuwe grenzen: als $x \to 0+$, dan $u \to 1$ en als $x \to \infty$ dan $u \to 0+$. In de nieuwe variabele is de integraal dus

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \log x\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 \log\log \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Ten slotte verwisselen we de grenzen om het voorteken te absorberen, en we herschijven het eindresultaat weer met de "gebruikelijke" notatie x i.p.v. u, om te krijgen

$$\int_0^1 \log(\log \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x.$$

Achtergrond: deze integralen convergeren naar de constante van Euler-Mascheroni. Zie de wikipedia-pagina daarover.

9. Los het beginwaardeprobleem op. 6 pt.

Druk je integratieconstanten uit in de constanten a, b, c en k.

$$\begin{aligned} y'' &= c + k^2 y, \\ y(0) &= a, \\ y'(0) &= b. \end{aligned}$$

Een hint voor particuliere oplossing lijkt me in dit geval niet nodig.

Oplossing: We hebben hier te maken met een inhomogene lineaire 2e orde d.v. met constante coefficienten en daar hebben we een standaardmethode voor.

Als $k = 0$ dan hebben we alleen maar $y'' = c$ met oplossing $y(t) = ct^2 + bt + a$, deze voldoet (met deze keuze voor de constanten) aan de beginwaarden $y(0) = a$ en $y'(0) = b$. *Bonuspunt voor de enige student die dit heeft opgemerkt.*

Zij verder $k \neq 0$. Eerst lossen we de homogene vergelijking $y'' - k^2 y = 0$ op. Deze heeft karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 - k^2 = 0$$

met oplossingen $\lambda = \pm k$. Dit geeft de homogene oplossing

$$y_H = A\mathrm{e}^{kt} + B\mathrm{e}^{-kt},$$

waarin t de onafhankelijke variabele, en A, B integratieconstanten (afhankelijk van beginwaarden).

Verder zoeken we een particuliere oplossing y_P die voldoet aan

$$y'' - k^2 y = c;$$

hiervoor kunnen we de constante functie $y_p = -\frac{c}{k^2}$ nemen (die heeft immers $y_P'' = 0$).

We hebben dus als algemene oplossing

$$y = y_H + y_P = A\mathrm{e}^{kt} + B\mathrm{e}^{-kt} - \frac{c}{k^2}.$$

Hierin kunnen we A en B bepalen met de beginwaarden. Immers op $t = 0$ moet gelden

$$\begin{aligned} a &= y(0) = A + B - \frac{c}{k^2}, \\ b &= y'(0) = (A - B)k, \end{aligned}$$

oftewel

$$A + B = a + \frac{c}{k^2},$$
$$A - B = b/k.$$

Door deze vergelijkingen op te tellen resp. af te trekken vinden we

$$A = \tfrac{1}{2}(a + \frac{b}{k} + \frac{c}{k^2}),$$
$$B = \tfrac{1}{2}(a - \frac{b}{k} + \frac{c}{k^2}).$$

Dus de oplossing van het beginwaardeprobleem is

$$y = \tfrac{1}{2}(a + \frac{b}{k} + \frac{c}{k^2})\mathrm{e}^{kt} + \tfrac{1}{2}(a - \frac{b}{k} + \frac{c}{k^2})\mathrm{e}^{-kt} - \frac{c}{k^2}.$$

Je zou dit als je wilt iets mooier kunnen uitdrukken met hyperbolische functies sinh *en* cosh *maar dat wordt niet van je verwacht.*

10. Van een zekere functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weten we: 4 pt.

- f is tweemaal differentieerbaar en f'' is continu,
- $f(\frac{\pi}{4}) = f'(\frac{\pi}{4})$,
- $|f(x)| < \frac{1}{x^2}$ voor $x \in (\mathrm{e}^{\mathrm{e}}, \infty)$
- $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, en
- $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\infty} f(x)\sin x \, \mathrm{d}x = 2018.$

Bereken $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\infty} f''(x)\sin x \, \mathrm{d}x.$

Oplossing: Eenmaal partieel integreren:

$$\int f(x)\sin x \, \mathrm{d}x = -f(x)\cos x + \int f'(x)\cos x \, \mathrm{d}x.$$

Nogmaals partieel geeft

$$\int f'(x)\cos x \, \mathrm{d}x = f'(x)\sin x - \int f''(x)\sin x \, \mathrm{d}x.$$

Daaruit volgt, nu met grenzen, dat:

$$\int_{\pi/4}^{\infty} f(x)\sin x \, \mathrm{d}x = f'(x)\sin x - f(x)\cos x\Big|_{\pi/4}^{\infty} - \int_{\pi/4}^{\infty} f''(x)\sin x \, \mathrm{d}x.$$

Nu merken we op:

- $\lim_{x\to\infty} f'(x)\sin x = 0$ omdat $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ en sin is begrensd;
- $\lim_{x\to\infty} f(x)\cos x = 0$ omdat $\lim_{x\to\infty} x^{-2} = 0$ en $0 \leq |f(x)\sin x| \leq |f(x)| < x^{-2}$ voor x voldoende groot;
- $f'(\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4} - f(\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(f'(\frac{\pi}{4}) - f(\frac{\pi}{4})) = 0$ omdat $f'(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4})$;
- dus $\int_{\pi/4}^{\infty} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_{\pi/4}^{\infty} f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x$.

We concluderen dat $\int_{\pi/4}^{\infty} f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x = -2018$.
Uiteraard kun je ook aan de andere kant beginnen met partiëel integreren.