Tentamen Infinitesimaalrekening A

2 januari 2018, 9.00 – 12.00 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier en vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt.
- Je mag de opgaven in willekeurige volgorde maken. Je hoeft alleen de eerste zeven opgaven te maken, deze tellen elk voor tien punten, behalve opgave 4, die voor 15 punten telt. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 7,5. Met de achtste opgave (bonusopgave) kun je maximaal tien punten extra verdienen, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger dan 10 kan zijn.
- Voor uitwerkingen van een opgave die gedeeltelijk goed zijn krijg je een deel van het totaal aantal punten voor die opgave.
- Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten of andere electronica gebruikt worden, en ook geen boeken, dictaten of eigen aantekeningen. Smartphones moeten aan het begin van het tentamen uitgezet worden en mogen pas na afloop van het tentamen weer worden aangezet.
- *Veel succes!*

Opgave 1. (a) (5 punten) Bepaal de tweede-orde Taylorveelterm van $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in het steunpunt 1000 en bepaal hiermee een benadering van $\sqrt[3]{1001}$. [let op: derdemachts wortel]

(b) (5 punten) Toon aan dat de fout in je benadering van $\sqrt[3]{1001}$ in absolute waarde kleiner is dan 10^{-9}.

Opgave 2. Bepaal alle tweemaal differentieerbare reële functies $y(x)$ zodat $y'' - 2y' + 3y = 3x$ voor alle x.

Opgave 3. (a) (5 punten) Ga na of de volgende limiet bestaat: $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{2x}}$.

let op: exponent $\frac{1}{2x}$

Als de limiet bestaat, bereken hem. Als hij niet bestaat, leg uit waarom niet.

(b) (5 punten) Zelfde vragen voor $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\log(x) + \sin(\pi x)}$.

Z.O.Z!!!!!

Opgave 4 (a) (7 punten) Primitiveer de functie $f(x) = x^2 \sin(2x+3)$.

Controleer je antwoord door differentiëren.

(b) (8 punten) Bereken $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$.

Opgave 5. Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $z^4 + iz^2 + 2 = 0$.

Geef de getallen in de vorm $a + bi$ waarbij a en b reëele getallen zijn.

Opgave 6. Bepaal een differentieerbare functie $y(x)$ die gedefinieerd is op het hele domein $(0, \infty)$, zodat geldt $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + 1$ en $y(1) = 1$.

Opgave 7. Stel $f(x) = xe^{-x}$ op het domein $(-\infty, 1)$.

(a) (3 punten) Laat zien dat f een inverse heeft. We noemen de inverse g.

(b) (1 punt) Wat is het domein van g?

(c) (6 punten) Bepaal de lineaire benadering van g in $\frac{1}{2}\log 2$.

Bonusopgave. Opgave 8. In het volgende is x reëel.

Stel $\cos x$ is een rationaal getal. Laat zien dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat $\cos nx$ een rationaal getal is.

Als $\sin x$ een rationaal getal is, geldt dan ook altijd dat $\sin nx$ een rationaal getal is?