Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB133 werd in 2009-2010 gegeven door Prof. Dr. J. Hogendijk.

Tentamen Infinitesimaalrekening B (WISB133)
21 januari 2010

Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt.
Alle opgaven tellen even zwaar. Je hoeft alleen de eerste acht opgaven te maken, deze tellen elk voor tien punten. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 8. Met de negende opgave (bonusopgave) kun je maximaal tien punten extra verdienen, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger dan 10 kan zijn.
Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.

Opgave 1.

Definieer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door:
$f(x,y) = \frac{x+y}{|x|+|y|}$ als $(x,y) \neq (0,0)$ en $f(0,0) = 0$.
Ga na in welke punten f continu is en in welke niet. Geef argumenten.

Opgave 2.

Stel $f(x,y,z) = x^2y + yz^3 + 1$.
Laat zien dat f differentieerbaar is op $\mathbb{R}^3$. Bepaal de vergelijking van het raakvlak in $(1,-1,2)$ aan het oppervlak $f(x,y,z) = -8$.

Opgave 3.

Stel f is een differentieerbare functie: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. We definieren
$g(u,v) = (u^2 + 2v, 2u)$
$h(u,v) = f(g(u,v))$.

Druk $\frac{\partial h}{\partial u}$ uit in de partiële afgeleiden van f.
Laat daarna zien dat deze formule klopt in het geval $f(x,y) = x^2 + y$.

Opgave 4.

Voor een vaste $c \in \mathbb{R}$ stellen we:
$f(x,y) = x^2 + cxy + y^2$.
Bepaal alle kritieke punten van f.
Ga bij elk kritiek punt na of het een lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt is. Onderscheid hierbij verschillende gevallen voor c. Alle gevallen moeten behandeld worden.

Opgave 5.

Bepaal de maximale en minimale waarden van de functie $f(x,y,z) = (x-3)^2 + (y-4)^2 - z^2$ op de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
Bepaal ook de punten waar deze waarden worden aangenomen.
Beargumenteer waarom de gevonden waarden de maximale en minimale waarden van f op de bol moeten zijn.

Opgave 6.

Bepaal

$$\int_0^2 \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy\,dx$$

Opgave 7.

Stel P is het lichaam dat bestaat uit alle punten (x, y, z) met $y \geq 0$ en $z \geq 0$ die liggen binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 1$ en onder de paraboloïde $x^2 + y^2 = z$ (dat wil zeggen dat voor alle punten in P geldt $x^2 + y^2 \leq 1$ en $x^2 + y^2 \geq z$).
Schets P en bepaal het zwaartepunt van P. Veronderstel hierbij dat de massa homogeen verdeeld is.

Opgave 8.

Stel Y ("ijsco") is het lichaam dat bestaat uit alle punten (x, y, z) met $z \geq 0$ zodat $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ en $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z$.
Bepaal $\iiint_Y (x^2 + y^2)\, z\, dx\, dy\, dz$.

Opgave 9. (bonusopgave)

Stel $s = \frac{1}{2}(p + q + r)$ en $f(p, q, r) = \sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)}$. Dan is de oppervlakte van een driehoek met zijden $p, q, r > 0$ gelijk aan $f(p, q, r)$. Dit resultaat (dat ontdekt is door Archimedes) mag je zonder bewijs aannemen.
Laat nu zien dat van alle driehoeken met gegeven omtrek, de gelijkzijdige driehoek de maximale oppervlakte heeft.