Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{T}\!\mathcal{B}\!\mathcal{C}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB133 werd in 2009-2010 gegeven door Prof. Dr. J. Hogendijk.

Uitwerking[1] Uitwerkingen tentamen Infinitesimaalrekening B (WISB133) 21 januari 2010

Deze uitwerkingen zijn niet de enig mogelijke!

Opgave 1

. We geven hier een zeer uitgebreide uitwerking:
Omdat $(x, y) \mapsto x$ continu is en $x \mapsto |x|$ ook, is $(x, y) \mapsto |x|$ ook continu (de samenstelling van continue functies is continu). Op dezelfde manier is ook $(x, y) \mapsto |y|$ continu, dus is $(x, y) \mapsto |x| + |y|$ continu. Ook is $(x, y) \mapsto x + y$ continu want dit is een veeltermfunctie. De conclusie is dat f gedefinieerd door $f(x, y) = \dfrac{x + y}{|x| + |y|}$ continu is wanneer $|x| + |y| \neq 0$, dat wil zeggen overal wanneer $(x, y) \neq (0, 0)$.

f is niet continu in $(0, 0)$, want bijvoorbeeld geldt voor $x > 0$ $f(x, x) = 1$ dus $\lim_{x\downarrow 0} f(x, x) = 1 \neq 0 = f(0, 0)$.
Merk op $\lim_{x\uparrow 0} f(x, x) = -1$.

Opgave 2.

Stel $f(x, y, z) = x^2y + yz^3 + 1$.

f is een veeltermfunctie, en dus zijn alle partiële afgeleiden weer veeltermfuncties, en alle veeltermfuncties zijn continu. Dus is f differentieerbaar op $\mathbb{R}^3$.

We merken op dat $f(1, -1, 2) = -1 - 8 + 1 = -8$ dus $(1, -1, 2)$ ligt inderdaad in het oppervlak $f(x, y, z) = -8$. Er geldt $\nabla f(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^3, 3yz^2)$ dus
$\nabla f(1, -1, 2) = (-2, 9, -12)$. De vergelijking van het raakvlak in
$(1, -1, 2)$ aan het oppervlak
$f(x, y, z) = -8$ is daarom
$-2(x - 1) + 9(y + 1) - 12(z - 2) = 0$, dat wil zeggen
$-2x + 9y - 12z = -2 - 9 - 24 = -35$.

Opgave 3.

De kettingregel levert hier $\frac{\partial h}{\partial u} =$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{\partial y}{\partial u}$ met $x = u^2 + 2v, y = 2u$,
dus $\frac{\partial h}{\partial u} = 2u\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

In het voorbeeld $f(x, y) = x^2 + y$ krijgen we
$h(u, v) = (u^2 + 2v)^2 + 2u = u^4 + 4u^2v + 4v^2 + 2u$.
Nu is $\frac{\partial h}{\partial u} = 4u^3 + 8uv + 2$,
en $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x = 2(u^2 + 2v)$
en $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1$. En dus is

$2u\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4u(u^2 + 2v) + 2 \cdot 1 = 4u^3 + 8uv + 2$.
De formule $\frac{\partial h}{\partial u} = 2u\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ klopt dus in dit geval.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{T}\!\mathcal{B}\!\mathcal{C}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@a-eskwadraat.nl`

Opgave 4.

De kritieke punten krijgen we door de partiële afgeleiden nul te stellen. Dit levert $2x + cy = 0$ en $2y + cx = 0$. Hieruit krijgen we
$x = -\frac{c}{2}y$ en $y = -\frac{c}{2}x$, zodat $x = \frac{c^2}{4}x$.
Als $c^2 \neq 4$ moet dus $x = 0$ en ook $y = 0$, zodat er maar één kritiek punt is, namelijk (0,0). Als $c^2 = 4$ zijn twee gevallen mogelijk: $c = 2$ of $c = -2$.
Wanneer $c = 2$ voldoen alle punten (x, y) met $x = -y$, er zijn dan oneindig veel kritieke punten. Voor $c = -2$ zijn alle punten (x, y) met $x = y$ kritieke punten.
Stel eerst $c \neq 2, -2$. Om naar de aard van de extremen te kijken bepalen we de tweede-orde afgeleiden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = c$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$.
Dus $D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 = 4 - c^2$.
Als $D > 0$ is er een extreem; en dit is het geval als $-2 < c < 2$.
Omdat $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ neemt f in (0,0) een minimum aan.
Als $D < 0$ is er een zadelpunt; dit is het geval als $c < -2$ en als $c > 2$.
(dit alles kun je eventueel ook inzien zonder Hessiaan, door f op een handige manier anders te schrijven)
We bekijken nu de gevallen $c = 2$ en $c = -2$ apart.
Als $c = 2$ hebben we $f(x, y) = (x + y)^2$, en als $x = -y$ geldt $f(x, y) = 0$. In alle kritieke punten neemt f de waarde 0 aan, maar voor alle x en y geldt $f(x, y) \geq 0$, dus elk kritiek punt heeft f een minimum (maar niet een strikt minimum).
Op soortgelijke manier zien we dat wanneer $c = -2$, dan $f(x, y) = (x - y)^2 \geq 0$ en $f(x, y) = 0$ in alle kritieke punten, dus ook voor $c = 2$ heeft f een minimum (maar geen strikt minimum) in elk kritiek punt.

Opgave 5.

Omdat f continu is en de bol gesloten en begrensd, moet f zijn maximum en minimum op de bol aannemen. Dat kan zijn op de rand of in een kritiek punt. De kritieke punten van f vinden we door de partiële afgeleiden 0 te stellen, we krijgen $2(x-3) = 0, 2(y-4) = 0$ en $-z = 0$, er is dus één kritiek punt namelijk $(3, 4, 0)$ dat echter buiten de bol ligt omdat $3^2 + 4^2 > 1$. Daarom liggen punten op de bol waarin f zijn extremen aanneemt, op de rand van de bol. Om deze punten (x, y, z) te vinden passen we Lagrange-multiplicatoren toe: er moet een λ bestaan zodat

$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ met $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,
en verder moet (x, y, z) op de bol liggen. We vinden de vergelijkingen

$2(x - 3) = \lambda x$, $2(y - 4) = \lambda y$, $-2z = \lambda z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Uit de derde vergelijking volgt $z = 0$ of $\lambda = -2$.
Als $\lambda = -2$ dan moet $x = \frac{3}{2}$ en $y = 2$, en omdat $2^2 > 1$ krijgen we dan een tegenspraak met $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Conclusie is: $z = 0$. Uit de eerste twee vergelijkingen volgt dan
$\lambda xy = 2(x - 3)y = 2(y - 4)x$, dus $(x - 3)y = (y - 4)x$, en hieruit $-4x = -3y$, dus $y = \frac{4}{3}x$. Invullen in $x^2 + y^2 = 1$ geeft $x^2 = \frac{9}{25}$. Hieruit komen twee punten $P_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ en $P_2 = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0)$.
We hebben $f(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0) = (\frac{3}{5} - 3)^2 + (\frac{4}{5} - 4)^2$
$= \frac{12^2}{5^2} + \frac{16^2}{5^2} = \frac{4^2}{5^2}(3^2 + 4^2) = 16$
en $f(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0) = (\frac{3}{5} + 3)^2 + (\frac{4}{5} + 4)^2$
$= \frac{18^2}{5^2} + \frac{24^2}{5^2} = \frac{6^2}{5^2}(3^2 + 4^2) = 36$.
Dus in P_1 heeft f een minimum en in P_2 een maximum.
(Je kunt dit trouwens ook geometrisch inzien; de gevraagde waarden zijn het kwadraat van de afstanden van $(3, 4, 0)$ tot P_1 en P_2, merk op dat $z = 0$. De afstand van $(3, 4, 0)$ tot de oorsprong is 5, en daarom verwacht je 4^2 en 6^2 te vinden, wat inderdaad klopt.)

Opgave 6.

We herschrijven de integraal eerst als integraal over een driehoek D met hoekpunten (0,0), (0,2), (2,2) en verwisselen daarna de integratievolgorde. Dan laat de integraal zich gemakkelijk uitwerken.
$\int_0^2 \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\, dydx = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\, dxdy = \int_0^2 \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\, dxdy = \int_0^2 \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\, dy.$
Nu is met de substitutiestelling uit Infi A, als we $z = y^2$ stellen $\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\, dy =$
$\frac{1}{2} \int \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}\, dy =$
$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+z}}\, dz = \sqrt{1+z} = \sqrt{1+y^2}.$
De gevraagde integraal is dus gelijk aan $\sqrt{1+2^2} - \sqrt{1} = \sqrt{5} - 1$.

Opgave 7.

Voor $0 \le z_0 \le 1$ is de doorsnede van P met het vlak $z = z_0$ een halve ring, waarin punten (x, y, z_0) liggen met $z_0 \le x^2 + y^2 \le 1$ en $y \ge 0$. De oppervlakte van deze doorsnede is het verschil tussen de oppervlakte van de halve cirkels met stralen 1 en $\sqrt{z_0}$, dat is $\frac{\pi}{2}(1 - z_0)$.
Het volume van P is derhalve met de 'plakjesmethode' $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi}{2}(1-z)dz = \frac{\pi}{4}$ (het volume kan uiteraard ook worden uitgerekend door cylindercoördinaten te substitueren)
Voor de berekening van het zwaartepunt substitueren we cylindercoördinaten $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ (met $0 \le r,\ 0 \le \theta \le \pi$) om het werk gemakkelijker te maken. De bijbehorende Jacobiaan is r.
We moeten nu drie integralen berekenen: $\iiint_P x\ dxdydz = \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_0^\pi r \cdot r\cos\theta\ d\theta\ dr\ dz.$
Omdat $\int_0^\pi \cos\theta\ d\theta = 0$ volgt $\iiint_P x\ dxdydz = 0$.

$\iiint_P y dxdydz = \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_0^\pi r \cdot r\sin\theta\ d\theta drdz =$
$\int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 2r^2 drdz =$
$\int_0^1 \frac{2}{3}(1 - z^{\frac{3}{2}})dz = \frac{2}{3} \cdot (1 - \frac{2}{5}) = \frac{2}{5}.$

$\iiint_P z\ dxdydz = \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_0^\pi rz\ d\theta\ dr\ dz = \pi \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 rz\ drdz = \pi \int_0^1 \frac{1}{2}(1-z)z\ dz = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{12}.$
Om de coordinaten van het zwaartepunt te krijgen moeten we door het volume delen. We vinden het zwaartepunt $(0, \frac{8}{5\pi}, \frac{1}{3})$.

Opgave 8.

We substitueren bolcoördinaten $x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi$. De bijbehorende Jacobiaan is $\rho^2\sin\phi$. Het lichaam Y bestaat in bolcoordinaten uit de punten waarvoor $0 \le \rho \le 1$ en $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$, θ kan alle waarden tussen 0 en 2π aannemen.
In bolcoördinaten wordt de te integreren functie $(x^2 + y^2)\, z = \rho^2 \sin^2\phi \cdot \rho\cos\phi$. De integraal wordt

$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^3 \sin^2\phi\cos\phi \cdot \rho^2 \sin\phi\ d\phi\ d\theta\ d\rho =$
$\int_0^1 \rho^5 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\phi\cos\phi d\phi \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{6}\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\phi\cos\phi d\phi.$
Een primitieve van $\phi \mapsto \sin^3\phi\cos\phi$ is $\phi \mapsto \frac{1}{4}\sin^4\phi$ zodat $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\phi\cos\phi d\phi = \frac{1}{16}$. De gevraagde integraal is dus $\frac{\pi}{48}$.
Opmerking: deze opgave kan ook (volgens sommigen zelfs gemakkelijker) met cylindercoördinaten. Ga dit zelf na!

Opgave 9.

Van de bonusopgave geven we geen uitwerking; als men dit op slimme manier aanpakt, is zeer weinig rekenwerk nodig.