Infinitesimaalrekening

Tweede deeltentamen 15 januari 2009, 14.00 – 17.00 uur

Maak de opgaven op het uitgereikte papier.
Vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in.
Zet op het eerste blad de naam van je werkcollegebegeleider.
Nummers van werkcollegegroepen en namen van werkcollegebegeleiders en studentassistenten (in blok 2):
1 (BBL 426) Jakub Byszewski, Esger Renkema
2 (BBL 420) Slavik Koval, Bram Bet
3 (diverse zalen) Janne Kool, Thom Klaasse
4 (Minnaert 204) Jantien Dopper, Wouter van Limbeek
5 (Minnaert 207) Wouter Stekelenburg, Koen van Woerden

Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt.

Alle opgaven tellen even zwaar. Je hoeft alleen de eerste zeven opgaven te maken, deze tellen elk voor tien punten. Het deeltentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 7. Met de achtste opgave (bonusopgave) kun je maximaal tien punten extra verdienen, met dien verstande dat het totaalcijfer voor het deeltentamen nooit hoger dan 10 kan zijn.

Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.

Veel succes!

Opgave 1. Stel $f(x,y,z) = (2xy + z^2,\ xyz)$. Bepaal de lineaire benadering van f in het steunpunt (1,2,3).

Opgave 2. Stel f is een differentieerbare functie: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
We definieren $g(u,v,w) = f(v + 2w,\ -3u,\ v - 2w)$.
Laat zien dat g differentieerbaar is, en druk de gradiënt $\nabla g(u,v,w)$ uit in de partiële afgeleiden van f.
Kies nu $f(x,y,z) = xyz$ en bereken g en $\nabla g(-1,0,1)$. Laat zien dat de formule die je hierboven gevonden hebt voor $\nabla g(u,v,w)$ in dit geval klopt.

Z.O.Z!!!!!!!!

Opgave 3. Stel $f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - x^2 - y^2$.
Bepaal alle (vier) kritieke punten van f. Ga na of deze punten een lokaal maximum, een lokaal minimum of een zadelpunt van f zijn.

Opgave 4.
Bepaal de maximale en minimale waarden van de functie $f(x, y, z) = 6x + 4y + z^2$ op de ellipsoïde die bestaat uit de punten (x, y, z) met $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 20$ (N.B. alleen het oppervlak, dus niet het inwendige). Bepaal ook de punten waar deze waarden worden aangenomen.
Beargumenteer waarom de gevonden waarden de maximale en minimale waarden van f op het oppervlak moeten zijn.

Opgave 5. Zij V is het gebied ('vlaaipunt')
bestaande uit de punten (x, y) met $0 \leq y \leq x$ en $x^2 + y^2 \leq 1$.
Schets V en bepaal $\iint_V x \, dx \, dy$.
Bereken het zwaartepunt van V (veronderstel dat de massadichtheid constant is).

Opgave 6. Schets de vierzijdige pyramide W met hoekpunten $(0, 0, 1), (1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(-1, 1, 0)$ en $(-1, -1, 0)$.
Integreer de functie $f(x, y, z) = z^2$ over W.

Opgave 7. Integreer de functie $f(x, y, z) = xyz$ over het gebied A dat bestaat uit alle punten (x, y, z) met $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ en $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Bonusopgave: Opgave 8. We bestuderen de volgende limiet:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bestaat deze limiet (en zo ja, wat is de waarde) of bestaat hij niet?
Geef niet alleen een antwoord maar ook argumenten. Het goede antwoord en goede argumenten leveren allebei punten op!