Infinitesimaalrekening

Tweede deeltentamen 15 januari 2009, uitwerkingen.

Opmerking vooraf: van de meeste opgaven zijn diverse goede uitwerkingen mogelijk! (ook andere dan hieronder aangegeven worden)

Opgave 1. We berekenen de totale afgeleide van f: $Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$.
Dus
$Df(1,2,3) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. De lineaire benadering in het steunpunt (1,2,3) is nu
$f(1,2,3) + Df(1,2,3)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}$, dat wil zeggen $(13,6) + (4(x-1) + 2(y-2) + 6(z-3), 6(x-1) + 3(y-2) + 2(z-3)) = (4x + 2y + 6z - 13, 6x + 3y + 2z - 12)$.

Opgave 2. g is differentieerbaar want het is de compositie van twee differentieerbare functies f en $h : (u,v,w) \to (v + 2w, -3u, v - 2w)$.
Deze tweede functie is differentieerbaar want alle coordinaatfuncties zijn veeltermen en dus differentieerbaar. Met de kettingregel krijgen we

$$(\tfrac{\partial g}{\partial u}, \tfrac{\partial g}{\partial v}, \tfrac{\partial g}{\partial w}) = (\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial z})\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (-3\tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial x} + \tfrac{\partial f}{\partial z}, 2\tfrac{\partial f}{\partial x} - 2\tfrac{\partial f}{\partial z}).$$

Nu het voorbeeld: als $f(x,y,z) = xyz$ krijgen we $g(u,v,w) = -3uv^2 + 12uw^2$. Dus $\nabla g(u,v,w) = (-3v^2 + 12w^2, -6uv, +24uw)$. Dus $\nabla g(-1,0,1) = (12,0,-24)$. Verder geldt $h(-1,0,1) = (2,3,-2)$ en $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (yz, xz, xy)$ dus in $(2,3,-2)$ geldt $\frac{\partial f}{\partial x} = -6$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 6$. Daaruit krijgen we $(-3\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}, 2\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial z}) = (12,0,-24)$. De formule klopt dus in dit geval.

Opgave 3 Om de kritieke punten van $f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - x^2 - y^2$ te bepalen stellen we de partiële afgeleiden 0, dit levert $6x^2 + 6y^2 - 2x = 0$ en $12xy - 2y = 0$. Deze laatste vergelijking heeft twee oplossingen. Geval 1 is $y = 0$, we krijgen dan uit de eerste vergelijking $6x^2 - 2x = 0$, dus $x = 0$ of $x = \frac{1}{3}$. Dit levert twee kritieke punten $(0,0)$ en $(\frac{1}{3}, 0)$.
Geval 2 is $12x - 2 = 0$ dus $x = \frac{1}{6}$; in dit geval wordt de eerste vergelijking
$\frac{1}{6} + 6y^2 - \frac{1}{3} = 0$, dus $y^2 = \frac{1}{36}$, we krijgen dan $y = \pm\frac{1}{6}$. Dit levert ook twee kritieke punten $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ en $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$.
Om te bepalen of deze punten extremen zijn of niet, berekenen we de tweede-orde partiële afgeleiden in elk van deze punten.

1

Er geldt in het algemeen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x - 2$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12y$. We berekenen hiermee de grootheid $D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2$.

In (0,0) is $D = 4 > 0$, f heeft daar dus een extreem, en omdat $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 < 0$ heeft f in (0,0) een locaal maximum. In $(\frac{1}{3}, 0)$ geldt ook $D = 4 > 0$, er is dus een extreem: nu is $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{3}, 0) = 2 > 0$ en dus heet f in $(\frac{1}{3}, 0)$ een locaal minimum. In $(\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{6})$ geldt $D = -4 < 0$, dus in deze punten heeft f een zadelpunt.

Opgave 4 Om met de laatste vraag te beginnen: het oppervlak is gesloten en begrensd en $f(x, y, z) = 6x + 4y + z^2$ is continu (want een veelterm), dus f neemt zijn minimum en maximum aan op dit oppervlak.

Om de extremen te vinden gebruiken we Lagrange-multiplicatoren: De extremen zijn in punten (x, y, z) waarvoor een λ bestaat zodat $\lambda(6, 4, 2z) = (6x, 4y, 2z)$ en $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 20$. Uit $\lambda(2z) = 2z$ volgt $z = 0$ of $\lambda = 1$. Als $z = 0$ krijgen we $6 = 6\lambda x$ en $4 = 4\lambda y$, en $3x^2 + 2y^2 = 20$. Dus $x = y = \frac{1}{\lambda}$ en daarom $x^2 = y^2 = 4$. We krijgen twee punten $(2, 2, 0)$ en $(-2, -2, 0)$, met $f(2, 2, 0) = 20$, $f(-2, -2, 0) = -20$. Als $\lambda = 1$ krijgen we ook $x = y = 1$ en daarna $z^2 = 15$ dus $z = \pm\sqrt{15}$. We krijgen twee punten $(1, 1, \pm\sqrt{15})$. $f(1, 1, \pm\sqrt{15}) = 10 + 15 = 25$.

Conclusie: het gevraagde maximum is 25, dit wordt aangenomen in de twee punten $(1, 1, \pm\sqrt{15})$. Het minimum is -20, dit wordt aangenomen in $(-2, -2, 0)$.

Opgave 5 We substitueren poolcoórdinaten $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$. De integraal wordt dan $\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta\, r\, d\theta\, dr = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{6}\sqrt{2}$. Om het zwaartepunt te bepalen berekenen we ook $\iint_V y\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\theta\, r\, d\theta\, dr = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Om het zwaartepunt te vinden delen we deze integralen door de oppervlakte van V, dit is $\frac{1}{8}\pi$. We vinden dan $(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}, \frac{8-4\sqrt{2}}{3\pi})$.

Opgave 6: We kunnen de pyramide schrijven als de verzameling van punten (x, y, z) zodat $0 \leq z \leq 1, -(1-z) \leq x \leq (1-z), -(1-z) \leq y \leq (1-z)$. De integraal wordt $\int_0^1 \int_{-(1-z)}^{1-z} \int_{-(1-z)}^{1-z} z^2 dxdydz = \int_0^1 z^2(4(1-z)^2)dz = 4(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}) = \frac{2}{15}$.

Opgave 7 We substitueren bolcoördinaten:
$x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\theta$. De integraal wordt dan $\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\sin\phi\cos\theta\,\rho\sin\phi\sin\theta\,\rho\cos\phi\,\rho^2\ sin\phi\, d\theta\, d\phi\, d\rho$ en dit is gemakkelijk uit te rekenen met uitkomst $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{48}$. Deze opgave kan ook anders (zonder substitutie van variabelen) maar is dan bewerkelijker.

Bonusopgave: De limiet bestaat wel met uitkomst 0. Dat kan aangetoond worden met de insluitstelling, of ook door substitutie van bolcoördinaten.

2