Infinitesimaalrekening

Herkansing, dinsdag 18 maart 2008, 14.00 – 17.00 uur

Maak de opgaven op het uitgereikte papier. Je krijgt 5 vellen papier uitgereikt. In verband met het efficiënt nakijken verzoeken we je het volgende te doen. Maak opgaven 1 en 2 op het eerste vel, opgaven 3 en 4 op het tweede vel, opgaven 5 en 6 op het derde vel, opgaven 7 en 8 op het vierde vel en opgaven 9, 10 en de bonusopgave op het vijfde vel.
Vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in.
Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden komt.
Alle 10 opgaven tellen voor 10 punten. Met de bonusopgave kunnen 10 extra punten verdiend worden. Het eindcijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 10.
Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.

Veel succes!

Opgave 1

Bereken: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt{1+x^2}}{(\sin x)^2}$

Opgave 2

Bepaal uit de derde-orde Taylorveelterm van de functie $x \mapsto \sin(x)$ in het steunpunt 0 een benadering van $\sin(1)$. Laat zien dat de fout in het antwoord kleiner is dan $\frac{1}{100}$.

Opgave 3

Bepaal een primitieve van de functie $x \mapsto \dfrac{x}{16+x^4}$. Controleer je antwoord.

Opgave 4

Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $z^2 + z(1-i) - 2i + 2 = 0$. Schrijf de getallen in de vorm $a + bi$. Controleer de antwoorden.

Opgave 5

Bepaal alle oplossingen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van de differentiaalvergelijking
$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = x^2$ met beginvoorwaarden $f(0) = f'(0) = 0$.

Z.O.Z!!!!!!!!

Opgave 6
Bepaal het raakvlak in het punt $(1, 2, 1)$ aan het oppervlak $x^3 + y^2 - 2yz = 1$.

Opgave 7
Bepaal de maximale en minimale waarden van de functie $f(x, y, z) = 3x^2 - y + z$ in het gebied $x^2 + 2y^2 + 2z^2 \leq 1$. Ga ook na waar deze maximale en minimale waarden aangenomen worden.

Opgave 8
Integreer de functie $f(x, y) = x^2 + 2y$ over de driehoek D met hoekpunten $(0, 0)$, $(0, 3)$ en $(3, 3)$.

Opgave 9
Stel $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ is het pad gegeven door
$c(t) = (\cos t, \sin t, t)$ voor $0 \leq t \leq \pi$ en $c(t) = (\cos t, \sin t, 2\pi - t)$ voor $\pi \leq t \leq 2\pi$.

(a) Maak een schetsje van het beeld van c. Bepaal de totale lengte van c.

(b) Bepaal $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ voor $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$.

Opgave 10
Gegeven zijn $\lambda > 0$ en $r > 0$. Het gebied G bestaat uit alle punten (x, y, z) waarvoor geldt $x^2 + y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$ en $0 \leq z \leq \lambda y$. Schets G en bereken het volume van G; laat zien dat dit volume van λ en r afhangt, maar niet van π.

Bonusopgave
Bepaal het zwaartepunt van het lichaam G in opgave 10. Veronderstel hierbij dat de massa homogeen verdeeld is.