Infinitesimaalrekening

Tweede deeltentamen 29 januari 2008, 15.00 – 18.00 uur

Maak de opgaven op het uitgereikte papier.
Vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in.
Zet op het eerste blad de naam van je werkcollegebegeleider.
Nummers van werkcollegegroepen en namen van werkcollegebegeleiders:
1 (Minnaert 018) Jantien Dopper,
2 (Minnaert 021) Tammo Jan Dijkema,
3 (Minnaert 023) Jeroen Sijsling,
4 (BBL 108a) Jaap Eldering,
5 (Minnaert 012, voorheen BBL 165) Bas Janssens.

Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt.

Alle opgaven tellen even zwaar. Je hoeft alleen de eerste negen opgaven te maken, deze tellen elk voor tien punten. Het deeltentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 9. Met de tiende opgave (bonusopgave) kun je maximaal tien punten extra verdienen, met dien verstande dat het totaalcijfer voor het deeltentamen nooit hoger dan 10 kan zijn.

Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.

Veel succes!

Opgave 1
Beschouw $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2x^2+3y^2}$.
Bepaal deze limiet als hij bestaat, of bewijs dat de limiet niet bestaat.

Opgave 2
Bepaal de totale afgeleide van $f(x,y,z) = x^2y + 3y^2z^3$ en de lineaire benadering van deze functie in het punt (2,-1,1).

Z.O.Z!!!!!!!!

Opgave 3
Stel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is een gegeven differentieerbare functie. We definieren $g(u, v) = f(u - v, u + v)$. Laat zien dat g differentieerbaar is en geef formules voor de partiële afgeleiden van g waarin alleen de partiële afgeleiden van f voorkomen. Controleer de formules die je gevonden hebt voor $f(x, y) = xy$.

Opgave 4
Bepaal het kritieke punt of de kritieke punten van $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. Ga bij elk kritiek punt na of het een maximum, minimum of zadelpunt is.

Opgave 5
Bepaal het absolute maximum en het absolute minimum van $f(x, y, z) = x + yz$ op de bol (rand en inwendige) die bestaat uit alle punten (x, y, z) met $x^2+y^2+z^2 \leq 3$. (Let op: 3.) Bepaal ook waar deze waarden worden aangenomen.

Opgave 6
Stel $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Bereken $\displaystyle\int_0^a \int_x^a \sin(y^2)\, dydx$.

Opgave 7
Stel D is het vierkant met hoekpunten (0,0), (2,2), (0,4), (-2,2). Bepaal $\displaystyle\iint_D y\, dxdy$.

Opgave 8
Stel **B** is het gedeelte van de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ waarvoor $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
B is dus een achtste deel van de hele bol.
Bepaal $\displaystyle\iiint_B z\, dxdydz$ door substitutie van bolcoordinaten. Bepaal het zwaartepunt van B, neem aan dat de massadichtheid overal hetzelfde is.

Opgave 9
Stel $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, 2xy + z^2, 2yz)$.
Bepaal de rotatie (curl) van $\mathbf{F}$.
Is er een functie f zodat $\mathbf{F} = \nabla f$? Bepaal deze functie indien hij bestaat, of bewijs dat hij niet bestaat.
Bepaal $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ over het pad $c : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ met $c(t) = (\sin t, \cos t, t)$.

Bonusopgave: Opgave 10
Probeer een zo klein mogelijk getal $c > 0$ te vinden zodat voor alle $x, y, z \geq 0$ geldt $xyz \leq c \cdot (x^3 + y^3 + z^3)$.
Hint: bekijk eerst getallen $x, y, z \geq 0$ met $x^3 + y^3 + z^3 = 1$.
Bewijs dat de c die je gevonden hebt, de eigenschap heeft: voor alle $x, y, z \geq 0$ geldt $xyz \leq c \cdot (x^3 + y^3 + z^3)$, en bewijs ook dat c het kleinste getal is met deze eigenschap.