Infinitesimaalrekening

Tweede deeltentamen 29 januari 2008, 15.00 – 18.00 uur. Uitwerkingen.

Nota Bene: sommige opgaven kunnen op verschillende manieren worden gemaakt. Deze uitwerkingen geven altijd maar één manier. Andere manieren kunnen dus ook goed zijn.

Opgave 1

Schrijf voor $(x,y) \neq (0,0)$ $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2x^2+3y^2}$. Nu geldt voor $x \neq 0$ $f(x,0) = \frac{1}{2}$ dus $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \frac{1}{2}$ en er geldt voor $y \neq 0$ $f(0,y) = \frac{1}{3}$ dus $\lim_{y\to 0} f(0,y) = \frac{1}{3}$. We concluderen dat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2x^2+3y^2}$ niet bestaat.

Opgave 2

De totale afgeleide van f is $Df(x,y,z) = (2xy, x^2 + 6yz^3, 9y^2z^2)$.
De lineaire benadering van deze functie in het punt (2,-1,1) is de functie $(x,y,z) \to f(2,-1,1) + \nabla f(2,-1,1) \cdot (x-2, y+1, z-1) = -1 + (-4,-2,9) \cdot (x-2, y+1, z-1) = -4x - 2y + 9z - 4$.

Opgave 3

Schrijf $h(u,v) = (u-v, u+v)$, Dan is h een (continu) differentieerbare functie (omdat de functies $u \to u-v$ en $u \to u+v$ veeltermen zijn en dus continu differentieerbaar). Met de kettingregel volgt dat $g = f \cdot h$ differentieerbaar is.
Uit de kettingregel volgt ook $Dg(u,v) = Df(h(u,v)) \cdot Dh(u,v)$. Schrijf $h(u,v) = (x,y)$. Als we dit uitwerken dan krijgen we $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
en $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
In het geval dat $f(x,y) = xy$ geldt $g(u,v) = (u-v)(u+v) = u^2 - v^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y = u+v$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x = u-v$.
De twee formules worden dan $2u = (u+v) + (u-v)$ en $-2v = -(u+v) + (u-v)$, en ze kloppen dus allebei.

Opgave 4

De kritieke punten vinden we door de gradient van f nul te stellen, we vinden dan $2x+y+1 = 0$ en $x+2y+1 = 0$, dit levert één punt op, namelijk $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Volgens de tweede-orde afgeleide test is in dit punt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$, er is dus een extreem. Omdat$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$ is het extreem een minimum.

Opgave 5
De bol met rand is een gesloten en begrensd gebied en f is continu dus f neemt op de bol met rand zijn extremen (maxima en minima) aan. Omdat $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ heeft f nergens kritieke punten. Alle extremen moeten daarom op de rand liggen.
De multiplicatoren-methode van Lagrange leert nu dat f alleen extremen op de rand kan hebben in punten (x, y, z) waarvoor een λ is zodat de volgende vier vergelijkingen gelden: $1 = 2\lambda x$, $z = 2\lambda y$, $y = 2\lambda z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.
Uit $1 = 2\lambda x$ volgt $\lambda \neq 0$. Uit $z = 2\lambda y$, $y = 2\lambda z$ volgt $z = 4(\lambda)^2 z$.
Dit levert de mogelijkheden $z = 0$ en $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. We bekijken deze mogelijkheden.
Als $z = 0$ moet wegens $z = 2\lambda y$ en $\lambda \neq 0$ ook volgen $y = 0$. Dan volgt uit $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ dat $x = \pm\sqrt{3}$, Dan is wegens $1 = 2\lambda x$ $\lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$. We hebben dus $(x, y, z) = (\pm\sqrt{3}, 0, 0)$.
Als $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ dan volgt uit $1 = 2\lambda x$ dat $x = \pm 1$. Verder hebben we $z = \pm y$ en nu concluderen we met de vergelijking $x^2+y^2+z^2 = 3$ dat de volgende mogelijkheden gelden: $(1, 1, 1)$ en $(1, -1, -1)$ voor $\lambda = \frac{1}{2}$ en $(-1, 1, -1)$ en $(-1, -1, 1)$ voor $\lambda = -\frac{1}{2}$.
We merken op dat $f(\sqrt{3}, 0, 0) = \sqrt{3}$, $f(-\sqrt{3}, 0, 0) = -\sqrt{3}$, en $f(1, 1, 1) = f(1, -1, -1) = 2$ en $f(-1, 1, -1) = f(-1, -1, 1) = -2$.
De maximale en minimale waarde van f op de bol met rand zijn daarom + 2 en -2 en deze worden aangenomen in de punten $(1, 1, , 1)$ en $(1, -1, -1)$ (maxima) en $(-1, 1, -1)$ en $(-1, -1, 1)$ (minima).

Opgave 6
Het gebied waarover de functie geïntegreerd wordt is de driehoek met hoekpunten $(0, 0), (a, a), (0, a)$. Door verwisseling van integratievolgorde vinden we dat de integraal gelijk is aan $\int_0^a \int_0^y \sin(y^2)\ dxdy$. Deze integraal kunnen we uitrekenen: $\int_0^a \int_0^y \sin(y^2)\ dxdy = \int_0^a y \sin(y^2)\ dy = -\frac{1}{2}\cos a^2 + \frac{1}{2}\cos 0 = \frac{1}{2}$.

Opgave 7
De integraal kan direct worden berekend, bijvoorbeeld door het gebied te splitsen in vier driehoeken met hoekpunt $(0, 2)$. We kunnen ook de substitutiestelling gebruiken: kies bijvoorbeeld de substitutie $(x, y) = T(u, v)$ met $T(u, v) = (-2u + 2v, 2u + 2v)$. Deze beeldt het vierkant $D*$ met hoekpunten $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ en $(1, 1)$ af op D. De bijbehorende Jacobiaan is 8, en onze integraal wordt nu $\iint_{D*}(2u + 2v)8\ dudv = 16$.
Opmerking: de integraal gedeeld door de oppervlakte van het vierkant geeft de $y-$coördinaat van het zwaartepunt van het vierkant. Omdat het zwaartepunt $(0, 2)$ moet zijn kunnen we ook zo zien dat de waarde van de integraal 16 is.

Opgave 8
Door substitutie van bolcoördinaten wordt de integraal
$\iiint_B z\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho \cos\phi \cdot \rho^2 \sin\phi d\phi d\theta d\rho =$
$\int_0^1 \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \cos\phi d\phi = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{16}$.
De inhoud van het achtste deel van de bol is $\frac{1}{8} \times \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi$. De z-coordinaat van het zwaartepunt is daarom $\frac{\pi}{16}$ gedeeld door $\frac{1}{6}\pi$, dat is $\frac{3}{8}$. Vanwege symmetrie zijn de coordinaten van het zwaartepunt daarom $(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$.
(Opmerking: een hiermee overeenkomend resultaat werd afgeleid door de Iraanse wiskundige Abū Sahl al-Kūhī (ca. 970).)

Opgave 9
De rotatie van F is $(0, 0, 0)$. Dit kun je zien door direct uit te rekenen maar ook doordat $F = \nabla f$ voor $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2$ en gebruikmakend van $rot(\nabla f) = (0, 0, 0)$.
Doordat $F = \nabla f$ is de lijnintegraal gelijk aan $f(c(\pi)) - f(c(0)) = f(0, -1, \pi) - f(0, 1, 0) = -\pi^2$.

Bonusopgave Hiervan wordt geen uitwerking gegeven. We blijven niet aan de gang.