Tentamen Infinitesimaalrekening B

18 maart 2010, 14.00 – 17.00 uur

Maak de opgaven op het uitgereikte papier. Vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in. Zet op het eerste blad het nummer van je werkcollegegroep. Geef ook een emailadres waarop je de voorlopige uitslag wilt ontvangen.

Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt. Alle opgaven tellen even zwaar. Je hoeft alleen de eerste acht opgaven te maken, deze tellen elk voor tien punten. Met de bonusopgave kun je tien extra punten halen. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 8.
Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten, eigen aantekeningen, gsm, enz. is niet toegestaan.

Veel succes!

Opgave 1. Definieer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{|x| + |y|}$ als $(x,y) \neq (0,0)$ en $f(0,0) = 0$. Ga na in welke punten f continu is. Zijn er punten waarin f niet continu is? Geef argumenten.

Opgave 2. Stel $f(x,y,z) = x^2 z - \dfrac{y}{z}$.
Laat zien dat f differentieerbaar is in het punt $(3,1,1)$.
Geef de lineaire benadering van f in het steunpunt $(3,1,1)$, en vind hiermee een benadering van $f(2\frac{9}{10},\ \frac{9}{10},\ 1\frac{1}{10})$.
Bepaal ook de richtingsafgeleide van f in $(3,1,1)$ langs de vector $(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$. In welke richting neemt f vanuit $(3,1,1)$ het meest toe?

Opgave 3. Stel f is een twee maal differentieerbare functie: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. We definieren
$g(s,t) = (st, s)$ en $h(s,t) = f(g(s,t))$.
Druk $\dfrac{\partial h}{\partial s}$ uit in de partiële afgeleiden van f.
Doe daarna hetzelfde voor $\dfrac{\partial^2 h}{\partial s^2}$.
Controleer je formules voor $f(x,y) = (x+y)^2$.

Z.O.Z!!!!!!!!

Opgave 4.
Stel $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + 2y - y^2$.
Bepaal alle kritieke punten van f. Ga bij elk kritiek punt na of het een lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt is.

Opgave 5.
We bestuderen de maximale en minimale waarden van de functie
$f(x, y, z) = x^3 - 6y^2 + 3z^2$ op het gebied dat bestaat uit de punten (x, y, z) met $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
[N.B, let op de derde macht (geen kwadraat) van x in de definitie van f.]
Laat zien dat deze functie ergens op dit gebied maximale en minimale waarden moet aannemen.
Bepaal daarna deze maximale en minimale waarden en ook de punten waar deze waarden worden aangenomen.

Opgave 6.
Integreer $f(x, y) = xy$ over de driehoek D met hoekpunten $(0, 0)$, $(3, 1)$, en $(4, 0)$.

Opgave 7.
We bekijken het lichaam L dat bestaat uit alle punten (x, y, z) met $0 \leq x \leq 2$ en $y^2 + z^2 \leq x^2$.
Schets L en bepaal $\iiint_L x\sqrt{y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$.

Opgave 8.
Laat a een positief getal zijn en b een willekeurig getal met $-a \leq b \leq a$.
Bepaal de inhoud van het gedeelte van de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ dat ligt tussen de vlakken $z = b$ en $z = a$. (Dit resultaat is ontdekt door Archimedes)

Bonusopgave: Opgave 9.
We bekijken de kromme $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ in het eerste kwadrant (d.w.z. voor $x \geq 0$, $y \geq 0$).
Stel B ("blad") is het gebied dat door deze kromme begrensd wordt.
Schets B, bepaal de oppervlakte van B en bepaal het zwaartepunt van B.
NB Alle relevante goede opmerkingen leveren punten op.