Uitwerkingen Tentamen Infi B

16 april 2013, 13.30-16.30

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.
- Schrijf op het eerst blad de naam van je werkcollegebegeleider (Wilfred de Graaf, Jan van Zweeden, Sanjay Ramawadh of Sebastian Klein).
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.

Opgave 1 (15 pt)
Beschouw de machtreeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$$

(a) Geef de convergentiestraal van deze machtreeks. (5 pt)

$$R = 1/\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ (2 pt) } = 1/1 = 1 \text{ (3 pt)}$$

(b) Geef een functie $f(x)$ zodat bovenstaande machtreeks de Taylorreeks is van $f(x)$. (10 pt)

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n &= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \text{ (2 pt) } = x^2 \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ (3 pt)} \\ &= x^2 \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{1-x} \text{ (2 pt) } = \frac{2x^2}{(1-x)^3} \text{ (3 pt)}.\end{aligned}$$

Opgave 2 (20 pt)
Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het gebied dat begrensd wordt door $x^2 + 2y^2 + (z-2)^2 = 4$ en waarvoor $z \geq 2$.

(a) Geef een parametrisatie van V, en het domein van deze parametrisatie, in termen van bolcoördinaten ("spherical coordinates"). (5 pt)

$$x = 2\rho\cos\theta\sin\phi\,,\quad y = \sqrt{2}\rho\sin\theta\sin\phi\,,\quad z = 2 + 2\rho\cos\phi \ (3\,\mathrm{pt})$$

$$0 \le \theta \le 2\pi\,,\quad 0 \le \phi \le \pi/2\,,\quad 0 \le \rho \le 1 \ (2\,\mathrm{pt})$$

(b) Bereken

$$\hat{x} = \int\int\int_V x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,\quad \hat{y} = \int\int\int_V y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,\quad \hat{z} = \int\int\int_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

(15 pt)

Wegens anti-symmetrie van x en de symmetrie van V ten opzichte van het vlak $x = 0$, is $\hat{x} = 0$ (3 pt). Evenzo is $\hat{y} = 0$ (3 pt).

$$\hat{z} = \int\int\int_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (2+2\rho\cos\phi)4\sqrt{2}\,\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \ (4\,\mathrm{pt})$$

2 pt aftrek als de Jacobiaan vergeten of niet correct is (1 pt aftrek als alleen de factor voor de Jacobiaan niet correct is) 1 pt aftrek als een onder- of bovengrens niet correct is.

$$\begin{aligned}
&= 16\pi\sqrt{2}\left(\int_0^1\int_0^{\pi/2} \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho + \int_0^1\int_0^{\pi/2} \rho^3\sin\phi\cos\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho\right)\\
&= 16\pi\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right) = \frac{22}{3}\pi\sqrt{2} \ (5\,\mathrm{pt})\,.
\end{aligned}$$

1 pt aftrek per rekenfout.

Opgave 3 (20 pt)
Zij $E \subset \mathbb{R}^2$ het gebied gedefinieerd door: $x, y \ge 0$, $x^2 + y^2 \le 2$ en $x \ge y$. De rand van E noemen we $\mathcal{K}$.
Gegeven is verder het vectorveld

$$\mathbf{G}(x,y) = xy(3x-y)\mathbf{i} + x^2(x+y)\mathbf{j}$$

(a) Teken E. (5 pt)

$1/8^e$ deel van een cirkel (taartpunt) met straal $\sqrt{2}$, onder de lijn $y = x$. 2 pt aftrek als straal niet correct, 2 pt aftrek als de locatie van de taartpunt niet correct.

(b) Bereken de lijnintegraal

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

waarbij $\mathcal{K}$ tegen de klok in wordt doorlopen. (15 pt)

Gebruik de stelling van Green:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{K}} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int\int_E \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ (5\,\mathrm{pt}) \\ &= \int\int_E 4xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ (2\,\mathrm{pt}) \ = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} 4r^2 \cos\theta \sin\theta\, r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \ (5\,\mathrm{pt})\,.\end{aligned}$$

2 pt aftrek als de Jacobiaan vergeten of niet correct is, 1 pt aftrek als een onder- of bovengrens niet correct is.

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} 2r^3 \sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 1 \ (3\,\mathrm{pt}).$$

1 pt aftrek per rekenfout.

Alternatieve berekening

Schrijf $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$ en parametriseer:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1 &: \mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\,t\,\hat{\mathbf{i}}\,,\ 0 \le t \le 1\,,\\ \mathcal{K}_2 &: \mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\cos(t)\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{2}\sin(t)\hat{\mathbf{j}}\,,\ 0 \le t \le \pi/4\,,\\ \mathcal{K}_3 &: \mathbf{r}(t) = (1-t)\hat{\mathbf{i}} + (1-t)\hat{\mathbf{j}}\,,\ 0 \le t \le 1\,.\end{aligned}$$

(meerdere varianten mogelijk)(5 pt)

Bereken

$$\int_{\mathcal{K}_1} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

(2 pt)

$$\int_{\mathcal{K}_2} \mathbf{G}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 4\int_0^{\pi/4} -\cos(t)\sin^2(t)(3\cos(t)-\sin(t))+\cos^3(t)(\cos(t)+\sin(t))\mathrm{d}t = \ldots = 2$$

(5 pt)

$$\int_{\mathcal{K}_3} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_0^1 4(1-t)^3\mathrm{d}\,t = -1$$

(2 pt)

Bij elkaar:

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 1$$

(1 pt)

Opgave 4 (45 pt)
Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het gebied gedefinieerd door: $x,\, z \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$ en $x + z \leq 1$. De rand van V noemen we $\mathcal{S}$, met een naar buiten gerichte normaal. Het gedeelte van $\mathcal{S}$ dat geparametriseerd wordt door $\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(1-x)\mathbf{k}$, $0 \leq x, y \leq 1$ noemen we $\mathcal{S}_1$. De rand van $\mathcal{S}_1$ noemen we $\mathcal{L}$. Gegeven is verder het vectorveld

$$\mathbf{H}(x,y,z) = x(x+z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + zy\mathbf{k}$$

(a) Bereken rechtstreeks de flux van $\mathbf{H}$ door $\mathcal{S}_1$. (10 pt)

Gebruik de gegeven parametrisatie

$$\int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S = (\pm) \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{H}(\mathbf{r}(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

(4 pt)

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(x\hat{\mathbf{i}} + y^2\hat{\mathbf{j}} + y(1-x)\hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

(3 pt)
Merk op dat hier het teken van $\hat{\mathbf{N}}$ zo gekozen is dat ze overeenkomt met een naar buiten wijzende normaal (1 pt).

$$= \int_0^1 \int_0^1 x + y(1-x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 3/4\,.$$

(2 pt)

(b) Bereken de flux van $\mathbf{H}$ door $\mathcal{S}_1$, door gebruik te maken van de divergentiestelling. (15 pt)

De rand van V bestaat uit vijf vlakken, die we zullen aanduiden als $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ $(y = 1)$, $\mathcal{S}_3$ $(x = 0)$, $\mathcal{S}_4$ $(y = 0)$ en $\mathcal{S}_5$ $(z = 0)$. De flux van $\mathbf{H}$ door $\mathcal{S}_1$ kan berekend worden door te gebruiken dat
flux door rand van $V = \int_V \operatorname{div} \mathbf{H}\, \mathrm{d}V$ (2 pt)
en:
flux door rand van $V =$ som van de fluxxen door $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$ en $\mathcal{S}_5$. Als de laatste vier fluxxen bekend zijn en de integraal over de divergentie van $\mathbf{H}$, dan kan daarmee de flux door $\mathcal{S}_1$ worden berekend. (1 pt)

$$\int_{\mathcal{S}_3} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}_4} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}_5} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S = 0$$

(3 pt)
Parametriseer $\mathcal{S}_2$ door $\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1-x$ (2 pt).
Dan is $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{j}}$ (1 pt) en

$$\int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1^2 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x) \, \mathrm{d}x = 1/2.$$

(2 pt)
Verder is $\operatorname{div} \mathbf{H} = 2x + 3y + z$ (1 pt) en

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{H} \, \mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x + 3y + z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

(1 pt)

$$= \int_0^1 \int_0^1 (2x+3y)(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 (2x+3/2)(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = 5/4$$

(1 pt)
Eindantwoord: flux van $\mathbf{H}$ door $\mathcal{S}_1$= $5/4 - 1/2 = 3/4$ (1 pt).

(c) Bereken rechtstreeks

$$I = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

(10 pt)

Merk op dat de keuze van een naar buiten gerichte normaal impliceert dat $\mathcal{L}$ tegen de klok in wordt doorlopen (1 pt).
Parametriseer de vier lijnstukken waaruit $\mathcal{L}$ bestaat als:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &: \mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{i}} + t\hat{\mathbf{j}}\,,\ 0 \leq t \leq 1\,, \\
\mathcal{L}_2 &: \mathbf{r}(t) = (1-t)\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}\,,\ 0 \leq t \leq 1\,, \\
\mathcal{L}_3 &: \mathbf{r}(t) = (1-t)\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\,,\ 0 \leq t \leq 1\,, \\
\mathcal{L}_4 &: \mathbf{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + (1-t)\hat{\mathbf{k}}\,,\ 0 \leq t \leq 1\,.
\end{aligned}$$

(meerdere varianten mogelijk)(4 pt)
De integralen over deze vier lijnstukken worden:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{L}_1} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = 1/3 \\
\int_{\mathcal{L}_2} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^1 (-1 + 2t) \mathrm{d}t = 0 \\
\int_{\mathcal{L}_3} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= -\int_0^1 (1-t)^2 \mathrm{d}t = -1/3 \\
\int_{\mathcal{L}_4} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^1 t \, \mathrm{d}t = 1/2
\end{aligned}$$

(4 pt)
Dus $I = 1/2$ (1 pt).

(d) Bereken I door gebruik te maken van de stelling van Stokes. (10 pt)

Stokes zegt:

$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{S}_1} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S$$

(4 pt)
Er geldt:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \operatorname{curl} \mathbf{H}(x, y, z) = z\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}$$

(1 pt)
Gebruik de gegeven parametrisatie, dan is:

$$\int_{\mathcal{S}_1} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S = (\pm) \int_0^1 \int_0^1 (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

(2 pt)

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left((1 - x)\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

(1 pt)
Merk op dat hier het teken van $\hat{\mathbf{N}}$ zo gekozen is dat ze overeenkomt met een naar buiten wijzende normaal (1 pt).

$$= \int_0^1 \int_0^1 (1 - x) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \; = 1/2$$

(1 pt)