Hertentamen Infi B

26 mei 2015, 08.30-11.30

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.

Opgave 1 (15 pt)
Beschouw de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

(a) Bepaal alle waarden van $x \in \mathbb{R}$ waarvoor de reeks convergeert. (5 pt)

(b) Geef een functie $f(x)$ zodat bovenstaande machtreeks gelijk is aan $f(x)$, voor alle x waarvoor de reeks convergeert. (10 pt)

Opgave 2 (15 pt)
Beschouw $F(x, y) = x^2 - xy$ op het gebied $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(a) Bepaal alle kritieke punten die in S liggen en hun aard (maximum, minimum of zadelpunt)(5 pt)

(b) Bepaal alle randmaxima van F. (10 pt)

Opgave 3 (20 pt)
Beschouw de functie

$$f_\alpha(x,y) = \frac{x^\alpha}{x^2+y^2}\,,$$

met $\alpha \geq 0$ en het domein $D \subset \mathbb{R}^2$ dat in poolcoördinaten geven wordt door $0 \leq r \leq 1$ en $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

(a) Teken het domein D. (5 pt)

(b) Bepaal de waarden van α waarvoor onderstaande oneigenlijke integraal bestaat. (10 pt)

$$\int\int_D f_\alpha(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

(c) Bereken de integraal uit onderdeel (b) voor het geval $\alpha = 1$. (5 pt)

Opgave 4 (25 pt)
Zij $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ het gebied dat begrensd wordt door de vlakken $S_1 : z = 0$, $S_2 : x = 0$, $S_3 : y = 0$, $S_4 : x = 1$ en $S_5 : z + y = 1$. Dit gebied wordt voorzien van een naar buiten wijzende normaal.
Zij $\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$, met $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

(a) Maak een schets van $\mathcal{H}$. (5 pt)

(b) Bereken rechtstreeks de flux van $\mathbf{F}$ door de rand van $\mathcal{H}$. (15 pt)

(c) Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door de rand van $\mathcal{H}$, door gebruik te maken van de divergentiestelling. (5 pt)

Opgave 5 (25 pt)
Zij $\mathcal{T} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = a^2\,,\ z \geq 0\}$ de halve bol met straal $a > 0$. Voorzie dit oppervlak van een naar buiten wijzende normaal. Zij

$$\mathbf{G}(x,y,z) = (y - z^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$$

Zij

$$I = \int\int_{\mathcal{T}} (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{N}\,\mathrm{d}S$$

(a) Bereken I rechtstreeks. (10 pt)

(a) Bereken I door middel van de stelling van Stokes. (15 pt)