Tentamen Infi B

15 april 2013, 17.00-20.00

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.
- Schrijf op het eerst blad de naam van je werkcollegebegeleider (Barbara van den Berg, Henk Hietbrink, Sebastian Klein of Joao Mestre).
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.

Opgave 1 (15 pt)
Zij $f(x) = e^{x^2}$.

(a) Bepaal de machtreeks van $f(x)$ rond $x = 0$. Dwz: schrijf $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ en geef de uitdrukking voor a_k. (5 pt)

(b) Bereken $f'(x)$ en bepaal de machtreeks van $f'(x)$ rond $x = 0$. (5 pt)

(c) Differentieer de machtreeks van $f(x)$ en laat zien dat de uitkomst overeenkomt met die van onderdeel (b). (5 pt)

Opgave 2 (25 pt)
Zij $E \subset \mathbb{R}^3$ het gebied dat boven de kegel $z^2 = (x^2 + y^2)$ en binnen de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ligt.

(a) Geef een schets van E. (5 pt)

(b) Bereken

$$\int\int\int_E (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}V\,.$$

(20 pt)
Bedenk goed welk soort coördinaten je gaat gebruiken (cylinder of bol) om deze integraal te berekenen.

Opgave 3 (25 pt) Zij $D \subset \mathbb{R}^3$ een begrensd gesloten gebied met een continu differentieerbare rand $\mathcal{S}$.

(a) Laat zien dat het volume van D gelijk is aan

$$I = \frac{1}{3} \int \int_{\mathcal{S}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \bullet \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S \, .$$

(10 pt)

(b) Bepaal het volume van een bol met straal R, door de integraal I te berekenen. (15 pt)

Opgave 4 (35 pt) Zij $\mathcal{C}$ de kromme gegeven door:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad , \quad 2x + y + z = 3 \, .$$

De kromme $\mathcal{C}$ is tegen de klok in georienteerd, gezien vanaf grote hoogte vanaf de positieve z-as. Zij $\mathbf{F}$ het vectorveld gegeven door:

$$\mathbf{F} = (y^2 + \sin x)\mathbf{i} + (2xy + z^2)\mathbf{j} + (xz + 2yz)\mathbf{k} \, .$$

(a) Bepaal een gebied $\mathcal{T}$ zodanig dat $\mathcal{C}$ de rand is van $\mathcal{T}$. (5 pt)

(b) Geef een parametrisatie van $\mathcal{T}$. (10 pt)

(c) Bepaal

$$\nabla \times \mathbf{F} \, .$$

(5 pt)

(d) Bereken door middel van de stelling van Stokes

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r} \, .$$

(15 pt)