Tentamen Infi B

15 april 2013, 17.00-20.00

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.
- Schrijf op het eerst blad de naam van je werkcollegebegeleider (Barbara van den Berg, Henk Hietbrink, Sebastian Klein of Joao Mestre).
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.

Opgave 1 (15 pt)
Zij $f(x) = e^{x^2}$.

(a) Bepaal de machtreeks van $f(x)$ rond $x = 0$. Dwz: schrijf $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ en geef de uitdrukking voor a_k. (5 pt)

$e^q = \sum_{k=0}^{\infty} q^k/k!$, substitutie $q = x^2$ geeft $e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}/k!$ (2 pt). Coefficienten zijn dan $a_k = 0$ als k oneven en $a_k = 1/(k/2)!$ als k even (3 pt).

(b) Bereken $f'(x)$ en bepaal de machtreeks van $f'(x)$ rond $x = 0$. (5 pt)

$f'(x) = 2xe^{x^2}$ (2 pt). $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2x^{2k+1}/k!$ (3 pt),

(c) Differentieer de machtreeks van $f(x)$ en laat zien dat de uitkomst overeenkomt met die van onderdeel (b). (5 pt)

$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}/k! = \sum_{k=1}^{\infty} 2x^{2k-1}/(k-1)! =$ (2 pt). De machtreeks uit (b) kan geschreven worden als: $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2x^{2k+1}/k!$
$= \sum_{l=1}^{\infty} 2x^{2(l-1)+1}/(l-1)! = \sum_{l=1}^{\infty} 2x^{2l-1}/(l-1)!$ (3 pt).

Opgave 2 (25 pt)
Zij $E \subset \mathbb{R}^3$ het gebied dat boven de kegel $z^2 = (x^2 + y^2)$ en binnen de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ligt. Tijdens tentamen toegevoegd: dus $z \geq 0$ en $z^2 \geq (x^2 + y^2)$.

(a) Geef een schets van E. (5 pt)

(b) Bereken

$$\int\int\int_E (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V\,.$$

(20 pt)
Bedenk goed welk soort coördinaten je gaat gebruiken (cylinder of bol) om deze integraal te berekenen.

Bolcoordinaten: $x = r\sin\phi\cos\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\phi$ (5 pt). Jacobiaan is $r^2\sin\phi$ (2 pt). Grenzen: $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta < 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi/4$ (3 pt).

$$\begin{aligned}
\int\int\int_E (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin^2\phi\, r^2\sin\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi && \text{(3pt)}\\
&= \frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi/4}\sin^3\phi\ \ \mathrm{d}\phi && \text{(3pt)}\\
&= \frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi/4}(1-\cos^2\phi)\sin\phi\ \ \mathrm{d}\phi && \text{(3pt)}^*\\
&= \frac{2\pi}{5}[-\cos\phi+\frac{1}{3}\cos^3\phi]_0^{\pi/4} = \frac{2\pi}{5}(\frac{2}{3}-\frac{5}{12}\sqrt{2}). && \text{(1pt)}
\end{aligned}$$

* als deze integraal op een andere manier wordt berekend, dan ook totaal 4 pt.

Opgave 3 (25 pt) Zij $D \subset \mathbb{R}^3$ een begrensd gesloten gebied met een continu differentieerbare rand $\mathcal{S}$.

(a) Laat zien dat het volume van D gelijk is aan

$$I = \frac{1}{3}\int\int_{\mathcal{S}} (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) \bullet \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S\,.$$

(10 pt)
In de vraagstelling had ik moeten vermelden dat $\hat{\mathbf{N}}$ de naar buiten wijzende eenheidsnormaal is. 2 bonuspunten voor studenten die dat opmerken.
Volgens de divergentiestelling van Gauss is

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\int\int_{\mathcal{S}} (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) \bullet \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S &= \frac{1}{3}\int\int\int_D \mathrm{div}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\mathrm{d}V && \text{(5pt)}\\
&= \int\int\int_D 1\,\mathrm{d}V && \text{(3pt)}
\end{aligned}$$

Deze laatste integraal is per definitie het volume van D (2 pt).

(b) Bepaal het volume van een bol met straal R, door de integraal I te berekenen. Bij tentamen toegevoegd: zonder de divergentiestelling te gebruiken.(15 pt)

Methode A: parametriseer de bol door $x = R\sin\phi\cos\theta$, $y = R\sin\phi\sin\theta$, $z = R\cos\phi$ (2 pt). Grenzen: $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ (1 pt).

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = R^2\sin^2\phi\cos\theta\mathbf{i} + R^2\sin^2\phi\sin\theta\mathbf{j} + R^2\sin\phi\cos\phi\mathbf{k} \quad \text{(4pt)}.$$

Deze vector geeft de richting van de normaal aan, die naar buiten wijst. (1 pt)

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \bullet \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right) = R^3\sin\phi \quad \text{(2pt)}.$$

Dan is

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \bullet \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right)\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta && \text{(2pt)} \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^3\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\pi R^3 && \text{(3pt)} \end{aligned}$$

Methode B: Ten opzichte van het coordinatenstelsel $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ wordt het vectorveld geschreven als $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = r\hat{\mathbf{r}}$, met $r = |\mathbf{r}|$ (5 pt). De naar buiten wijzende eenheidsnormaal op de bol is $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{r}}$ (2 pt), dus $\mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} = r$ (1 pt). Daarmee wordt

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}S && \text{(1pt)} \\ &= \frac{1}{3}\int\int_{\mathcal{S}} r\,\mathrm{d}S = \frac{1}{3}R\int\int_{\mathcal{S}} 1\,\mathrm{d}S = \frac{4}{3}R^3\pi\,. && \text{(3pt)} \end{aligned}$$

De laatste gelijkheid geldt omdat de integraal gelijk is aan de oppervlakte van een bol met straal R. (3 pt)

Opgave 4 (35 pt) Zij $\mathcal{C}$ de kromme gegeven door:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad , \quad 2x + y + z = 3\,.$$

De kromme $\mathcal{C}$ is tegen de klok in georienteerd, gezien vanaf grote hoogte vanaf de positieve z-as. Zij $\mathbf{F}$ het vectorveld gegeven door:

$$\mathbf{F} = (y^2 + \sin x)\mathbf{i} + (2xy + z^2)\mathbf{j} + (xz + 2yz)\mathbf{k}\,.$$

(a) Bepaal een gebied $\mathcal{T}$ zodanig dat $\mathcal{C}$ de rand is van $\mathcal{T}$. (5 pt)
Makkelijkst:

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \quad , \quad 2x + y + z = 3\,.$$

Als hier wordt verwezen naar onderdeel (b) en als dat correct is, dan hier ook volle punten.

(b) Geef een parametrisatie van $\mathcal{T}$. (10 pt)
Door middel van poolcoordinaten:

$$x = 1 + r\cos\theta \,(3\text{pt}), \qquad y = r\sin\theta \,(2\text{pt})$$
$$z = 3 - 2x - y = 1 - 2r\cos\theta - r\sin\theta \,(3\text{pt}).$$

$0 \leq r \leq 1$ en $0 \leq \theta \leq 2\pi$. (2pt)

(c) Bepaal

$$\nabla \times \mathbf{F}\,.$$

(5 pt)
Uitkomst: $(0, -z, 0)$. 2 pt aftrek per rekenfout.

(d) Bereken door middel van de stelling van Stokes

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

(15 pt)
Stelling van Stokes: Zij $\mathcal{C}$ de rand van een begrensd gebied $\mathcal{T}$, piecewise continu differentieerbaar (smooth), $\mathbf{F}$ een differentieerbaar (smooth) vectorveld en $\hat{\mathbf{N}}$ de eenheidsnormaal op $\mathcal{T}$, overeenkomend met de orientatie van $\mathcal{C}$ (2 pt, 1 pt aftrek per ontbrekende voorwaarde), dan:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int\int_{\mathcal{T}} \nabla \times \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S \text{ (3pt)} \\ &= \pm \int_0^{2\pi}\int_0^1 (0, -z, 0) \bullet \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right) \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \text{ (2pt)}\,,\end{aligned}$$

Met $\mathbf{r}(r, \theta)$ de parametrisatie van $\mathcal{T}$ en het $\pm$ teken zodanig gekozen dat de orientatie van de normaal klopt (1pt). In dit geval :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (2r, r, r) \text{ (3pt)}\,.$$

Merk op dat deze normaal de goede kant op wijst (naar buiten, overeenkomend met orientatie van $\mathcal{C}$) (1 pt). De integraal wordt dan:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-1 + 2r\cos\theta + r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \quad \text{(2pt)} \\ &= -\pi \text{ (1pt)}\,.\end{aligned}$$