Hertentamen Infi B

28 mei 2014, 09.00-12.00

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.
- Schrijf op het eerste blad de naam van je werkcollegebegeleider (Barbara van den Berg, Henk Hietbrink, Sebastian Klein of Joao Mestre.).
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.

Opgave 1 (15 pt)
Beschouw de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(x+1)^n$$

(a) Bepaal alle waarden van $x \in \mathbb{R}$ waarvoor deze machtreeks convergeert. (5 pt)

(b) Geef een functie $f(x)$ zodat bovenstaande machtreeks gelijk is aan $f(x)$, voor alle x waarvoor de reeks convergeert. (10 pt)

Opgave 2 (15 pt)
We zoeken drie positieve reële getallen x, y, z waarvan de som 30 is en waarvoor $P(x,y,z) = xy^2z^3$ maximaal is.

(a) Dit probleem is equivalent met het maximaliseren van een functie van twee variabelen, onder voorwaarden op de variabelen. Geef deze functie en de voorwaarden.(5 pt)

(b) Geef de oplossing van het probleem. Laat zien dat de oplossing inderdaad een maximum is, aan de voorwaarden voldoet en dat het uniek is. (10 pt)

Opgave 3 (20 pt)
Beschouw de functie

$$f(x,y) = xy^2 + e^x \sin(y)$$

en het domein $D \subset \mathbb{R}^2$ begrensd door de krommen $x = y^2 + 1$, $x = -y^2$, $y = -2$ en $y = 2$.

(a) Teken het domein D. (5 pt)

(b) Bereken

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Je mag zelf de integratievolgorde kiezen. (15 pt)

Opgave 4 (25 pt)
Zij $\mathcal{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ z \geq 0\}$.
Zij $\mathcal{S}$ de schijf gedefinieerd door $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\ z = 0\}$. Zij $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ het gebied begrensd door $\mathcal{H}$ en $\mathcal{S}$, voorzien van een naar buiten wijzende normaal. Gebruik deze normaal ook bij het beantwoorden van onderdelen (a), (b) en (c). Zij

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$$

(a) Bereken rechtstreeks de flux van $\mathbf{F}$ door $\mathcal{H}$. (10 pt)

(b) Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door de rand van $\mathcal{V}$, door gebruik te maken van de divergentiestelling. (10 pt)

(c) Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door $\mathcal{S}$, door gebruik te maken van onderdeel (a) en (b). (5 pt)

Opgave 5 (25 pt)
Zij $\mathcal{T} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 - z = 0\,,\ 0 \leq x\,,\ y \leq 1\}$. Voorzie dit oppervlak van een normaal die naar boven wijst (richting van de positieve z-as). Zij

$$\mathbf{G}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$$

Zij

$$I = \int\int_{\mathcal{T}} (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{N}\,\mathrm{d}S$$

(a) Bereken I rechtstreeks. (10 pt)

(b) Bereken I door middel van de stelling van Stokes. (15 pt)