Tentamen Infi B

12 april 2015, 8.30-11.30

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.
- Schrijf het antwoord op iedere vraag op een apart blad.
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.
- Doe je best om LEESBAAR te schrijven. Onleesbare antwoorden kunnen fout gerekend worden.

Opgave 1 (20 pt)
Beschouw de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$$

(a) (5 pt) Geef de convergentiestraal van deze machtreeks.

(b) (15 pt) Geef een functie $f(x)$ zodat bovenstaande machtreeks de Taylor reeks is van $f(x)$.

Opgave 2 (25 pt)
Zij $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ het gebied gegeven door $\mathcal{O} = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\,,$ $x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\}$, met $R > 0$.

(a) (5 pt) Bepaal $vol(\mathcal{O})$, de inhoud van $\mathcal{O}$.

(b) (10 pt) Bereken

$$\bar{x} = \frac{1}{vol(\mathcal{O})} \int\int\int_{\mathcal{O}} x \,\mathrm{d}V$$

(c) (10 pt) Bereken

$$\bar{z} = \frac{1}{vol(\mathcal{O})} \int\int\int_{\mathcal{O}} z \,\mathrm{d}V$$

Opgave 3 (25 pt)
Zij $T \subset \mathbb{R}^2$ het gebied gedefinieerd door: $T = \{(x,y) \,|\, x+y \leq 1\,,\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\}$. Gegeven is verder het vectorveld

$$\mathbf{F}(x,y) = -xy^2\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j}\,.$$

Zij

$$I = \int\int_T \operatorname{curl}\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{d}A\,.$$

(a) (10 pt) Bereken I rechtstreeks.

(b) (15 pt) Bereken I met behulp van de stelling van Green.

Opgave 4 (30 pt)
Zij C_1 de cylindermantel gegeven door

$$C_1 = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 = 1\,,\, z \geq 0\,,\, z \leq 1\}$$

en C_2 de deksel van de cylinder, gegeven door

$$C_2 = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\, z = 1\}$$

.
Zij $C = C_1 \cup C_2$ de "bodemloze"cylinder, voorzien van een naar buiten wijzende normaal. We hebben verder een vectorveld, dat ten opzichte van cylindercoördinaten $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\mathbf{k}}$ gegeven wordt door:

$$\mathbf{G}(r,\theta) = g(r,\theta)\hat{\mathbf{r}} + 0.\hat{\theta} + 0.\hat{\mathbf{k}} = g(r,\theta)\hat{\mathbf{r}}\,.$$

Merk op dat dit vectorveld alleen goed gedefinieerd is als $g(r,\theta)$ 2π periodiek is in θ, wat impliceert dat $g(r,0) = g(r,2\pi)$, voor alle $r \geq 0$. We nemen aan dat $g(r,\theta)$ continu differentieerbaar is. Laat zien dat

$$\int\int_C \operatorname{curl}\mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{dS} = 0\,,$$

(a) (15 pt) door rechtstreekse berekening van de integraal. Je mag gebruik maken dat in cylindercoördinaten

$$\operatorname{curl}\mathbf{G} = -\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}\hat{\mathbf{k}}$$

(b) (15 pt) met behulp van de stelling van Stokes. Hint: schrijf het vectorveld in Cartesische coördinaten, door gebruik te maken van

$$\hat{\mathbf{r}} = r\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + r\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$