Tentamen Infi B

10 april 2017, 9.00-12.00

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.
- Schrijf het antwoord op iedere vraag op een apart blad.
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.
- Doe je best om LEESBAAR te schrijven. Onleesbare antwoorden kunnen fout gerekend worden.

Opgave 1 (15 pt)

(a) (7 pt) Beschouw de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, x^n \,.$$

Bepaal alle waarden van x waarvoor deze machtreeks convergeert.

(b) (8 pt) Bepaal de uitkomst van de oneindige som:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} \,.$$

Opgave 2 (20 pt)

(a) (10 pt) Bepaal de maxima en minima van $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ op het domein $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq 1\}$

(b) (10 pt) Zij $g(x,y)$ een tweemaal continu differentieerbare functie. Gegeven is de transformatie $s = x - y^2$, $t = y$. We willen de Laplaciaan:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

schrijven in termen van afgeleiden naar s en t. De uitdrukking die je dan krijgt heeft de volgende vorm:

$$(1+4t^2)\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + a(s,t)\frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t} + b(s,t)\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + c(s,t)\frac{\partial g}{\partial s}.$$

Dit hoef je niet te bewijzen.
Bepaal de functies $a(s,t)$, $b(s,t)$ en $c(s,t)$.

Opgave 3 (20 pt)
Zij $TP \subset \mathbb{R}^2$ de taartpunt: $TP = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq 1\ ,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x\ ,\ x \geq 0\}$.
Neem aan dat TP een uniforme massaverdeling heeft. Bereken het massamiddelpunt van TP.

Opgave 4 (20 pt)
Het oppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ is de vereniging van

$$K = \{(x,y,z)\,|\,(z-1)^2 = x^2+y^2\ ,\ 0 \leq z \leq 1\,\}$$

en

$$C = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2 \leq 1\ ,\ z = 0\,\}\,.$$

Gegeven is het vectorveld:

$$\mathbf{F} = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door $S = K \cup C$, met een naar buiten wijzende normaal:

(a) (10 pt) Rechtstreeks.

(b) (10 pt) Met behulp van de divergentiestelling.

Opgave 5 (25 pt)
De kwart-bolschil $KB \subset \mathbb{R}^3$ wordt gedefinieerd door

$$KB = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 = 1\ ,\ z \geq 0\ ,\ y \geq 0\,\}$$

Gegeven is het vectorveld:

$$\mathbf{G} = z\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + y\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Bereken de flux van $\mathbf{curl}\,\mathbf{G}$ door KB, met een normaal die een positieve z-component heeft:

(a) (15 pt) Rechtstreeks.

(b) (10 pt) Met behulp van de stelling van Stokes.