Hertentamen Infi B

3 juli 2017, 08.30-11.30

- Schrijf het antwoord van elke vraag op een apart blad.
- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.

Opgave 1 (15 pt)
Beschouw de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$$

(a) Bepaal alle waarden van $x \in \mathbb{R}$ waarvoor deze machtreeks convergeert. (7 pt)

(b) Geef een functie $f(x)$ zodat bovenstaande machtreeks gelijk is aan $f(x)$, voor alle x waarvoor de reeks convergeert. (8 pt)

Opgave 2 (15 pt)
We zoeken drie niet-negatieve reële getallen x, y, z waarvan de som 9 is en waarvoor $P(x, y, z) = xyz$ maximaal is.

(a) Dit probleem is equivalent met het maximaliseren van een functie van twee variabelen, onder voorwaarden op de variabelen. Geef deze functie en de voorwaarden.(5 pt)

(b) Geef de oplossing van het probleem. Laat zien dat de oplossing inderdaad een maximum is, aan de voorwaarden voldoet en dat het uniek is. (10 pt)

Opgave 3 (20 pt)
Beschouw de functie

$$f(x,y) = x^2 y + x^3 \log(y+1)$$

en het domein $D \subset \mathbb{R}^2$ dat gedefineerd is als de driehoek met hoekpunten $(-1,2)$, $(0,0)$ en $(1,2)$.

(a) Bepaal het zwaartepunt van D. (10 pt)

(b) Bereken

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}A.$$

Kies zelf de integratievolgorde. (10 pt)

Opgave 4 (25 pt)
Zij $\mathcal{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\,,\, z \geq 0\}$.
Zij $\mathcal{S}$ de schijf gedefinieerd door $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\,,\, z = 0\}$. Zij $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ het gebied begrensd door $\mathcal{H}$ en $\mathcal{S}$, voorzien van een naar buiten wijzende normaal. Gebruik deze normaal bij het beantwoorden van onderdelen (a), (b) en (c). Zij

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$$

(a) Bereken rechtstreeks de flux van $\mathbf{F}$ door $\mathcal{H}$. (10 pt)

(b) Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door de rand van $\mathcal{V}$, door gebruik te maken van de divergentiestelling. (10 pt)

(c) Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door $\mathcal{S}$, door gebruik te maken van onderdeel (a) en (b). (5 pt)

Opgave 5 (25 pt)
Zij $\mathcal{T} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 - z = 0\,,\, 0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq 1\}$. Voorzie dit oppervlak van een normaal waarvan de z-component positief is. Zij

$$\mathbf{G}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$$

Zij

$$I = \int\int_{\mathcal{T}} (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{N}\,\mathrm{d}S$$

(a) Bereken I rechtstreeks. (10 pt)

(b) Bereken I door middel van de stelling van Stokes. (15 pt)